2019–2020 учебный год

Вариант 1

1. Положения равновесия: $(1,-1)$, $(-4,4)$.
$(1,-1)$ – седло, $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -5$, $h_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$(-4,4)$ – неустойчивый узел, $A = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $h_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

2. $y = \frac{(x-1)^2}{4}$, $\quad y = Cx - C^2 - C$, $\quad x_0 = 1 + 2C$.

---

3. Уравнение Эйлера $x^2y'' + 2xy' - 2y + \ln x^2 - 1 = 0$, допустимая экстремаль $\hat{y} = \frac{8}{x^2} - x + \ln x$.

---

4. $x = y + \frac{y^3}{3}$.

---

5. Условие эквивалентно тому, что любое решение однородного, делённое на x^2, стремится к константе. Характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2(a+1)^2)$. При $a \neq -1$ общее решение однородного уравнения

$$y_0 = C_1 + C_2e^{\sqrt{2}|a+1|x} + C_3e^{-\sqrt{2}|a+1|x}.$$

Здесь, даже после деления на x^2, есть бесконечно большие решения. Только при $a = -1$ любое решение однородного будет квадратичным многочленом, который при делении на x^2 устремится к константе. Ответ: $a = -1$.

---

6. Пусть функция $a(x)$ непрерывна, $a(x) > 0$ и $a'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant c$. Доказать, что для любого решения уравнения $y'' + a(x)y = 0$, $x \geqslant c$, выполнено неравенство

$$|y(x)| \leqslant \sqrt{\frac{y'^2(c) + a(c)y^2(c)}{a(x)}}.$$

Решение. Домножим уравнение на $2y'$ и полученное равенство проинтегрируем по отрезку $[c, x]$:

$$y'^2(x) - y'^2(c) + \int_c^x a(t)dy^2(t) = 0.$$

В полученном интеграле применим формулу интегрирования по частям, тогда

$$y'^2(x) - y'^2(c) + a(x)y^2(x) - a(c)y^2(c) - \int_c^x a'(t)y^2(t)dt = 0.$$

Поскольку $a'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant c$, имеем

$$-y'^2(c) + a(x)y^2(x) - a(c)y^2(c) \leqslant 0,$$

откуда следует заявленное неравенство.