НУ, метод Ньютона, СНУ

$f(x) = 0$

$x \in I = [A, B]$ – локализован корень

$\exists\, x^* \in I \quad x^* \simeq x \quad f(x^*) \cong 0$

по ф-ле Тейлора

параболизация

$$f(x) = \underbrace{f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)}_{\text{линеаризация}} + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots$$

$$x = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

⚠ $f'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in I$

уже надо решать квадратное ур-е

итерационный процесс по методу Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad x^0 = a \in I$$

не забывать!

? о сходимости

$$x^{k+1} = \varphi(x^k)$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

? Дост. усл. сходимости МПИ:

$\forall x \in I \quad |\varphi'(x)| \leq q < 1$

$$\left|\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)'\right| < 1$$

$$|\varphi'| = \left|\cancel{1} - \cancel{\frac{f'}{f'}} + \frac{f f''}{(f')^2}\right| < 1$$

$|f \cdot f''| < (f')^2$ — достаточное условие сходимости метода Ньютона

$x \in I \quad 0 \le m < |f| < M$

$0 < m_1 < |f'| < M_1$

$0 \le m_2 < |f''| < M_2$

Оценки сходимости метода Ньютона

для МПИ: априорная $|x - x^k| \le \frac{q^k}{1-q}|x^1 - x^0|$

$$q = \frac{M M_2}{m_1^2}$$

апостериорная

$$|x - x^k| \le \frac{q}{1-q}|x^k - x^{k-1}|$$

Доказывается (ПС Вержбицкий ЧМЛА и НУ стр. 157)

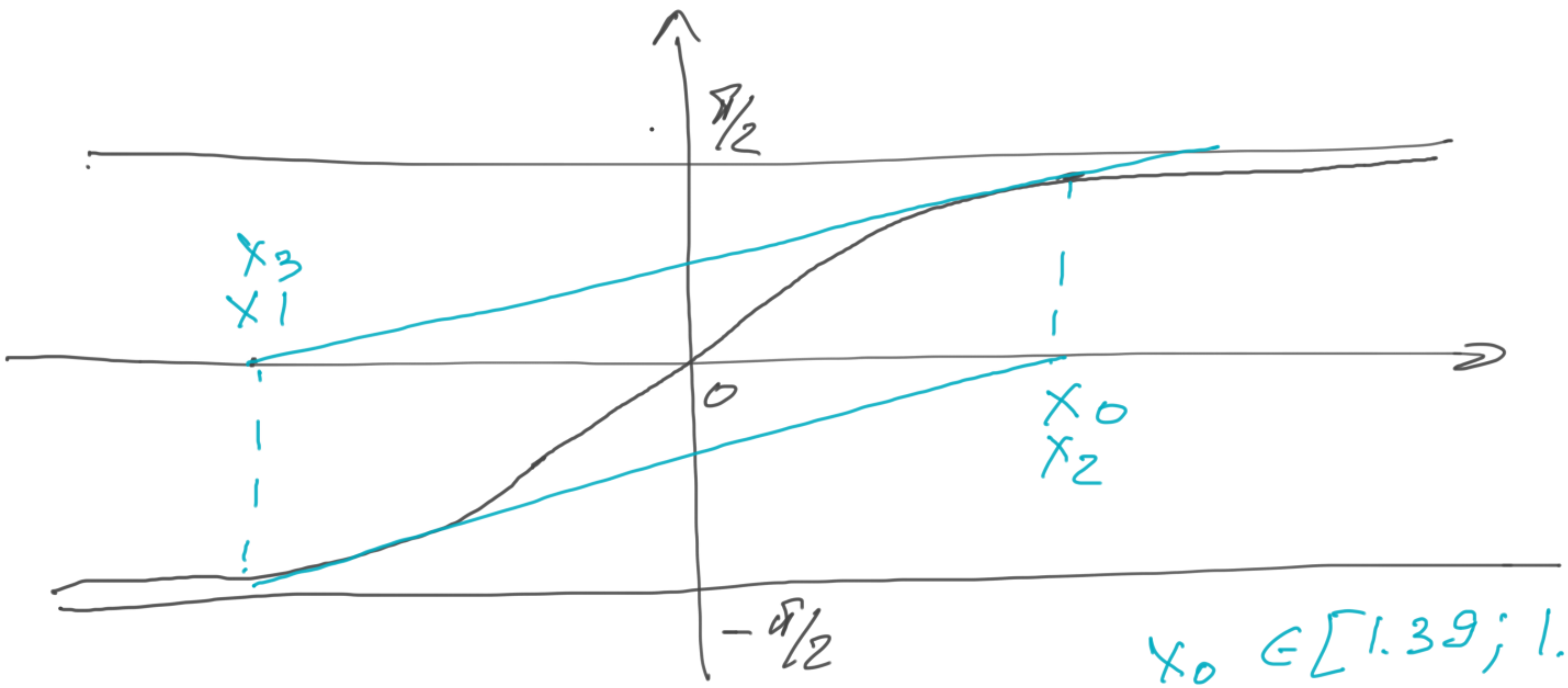
$$|x - x^k| \le \frac{M_2}{2m_1}|x - x^{(k-1)}|^2$$

$$|x - x^k| \le \frac{M_2}{2m_1}|x^k - x^{k-1}|^2$$

+

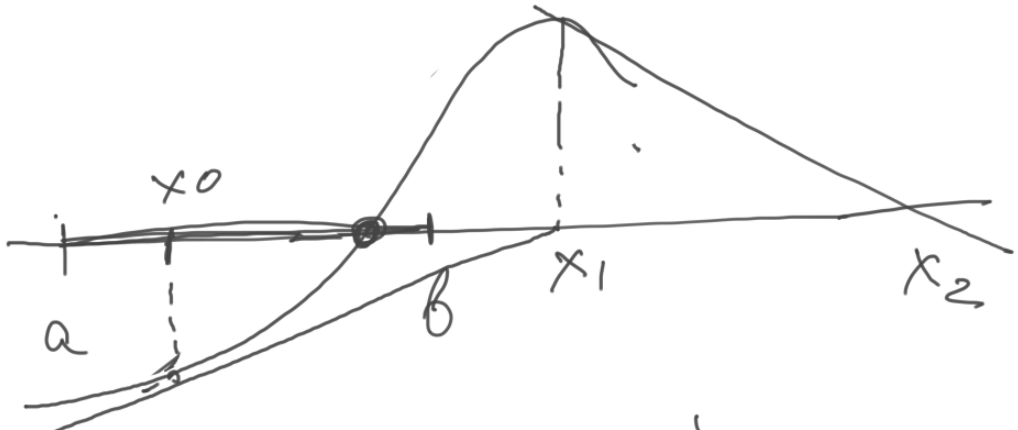
⊖ локальная сходимость

$\boxed{\text{Пример}}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x$



$x_0 \in [1.39; 1.40]$

$\boxed{\text{Пример}}$



Th (условие Фурье)

- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0,\ f''(x) \neq 0\ \forall x \in [a, b]$

то, если
- $x_0 \in [a, b]$
- $f(x_0) f''(x_0) > 0$

$\rightarrow$ можно найти реш. $f(x) = 0$ методом Ньютона с $\forall$ точностью

$\underline{\text{IV}}$. 11.13 a

$$e^x = \frac{1}{x}$$

ξ - точное значение

$\xi \in [0, 1]$

$$f(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = e^x - \frac{2}{x^3}$$

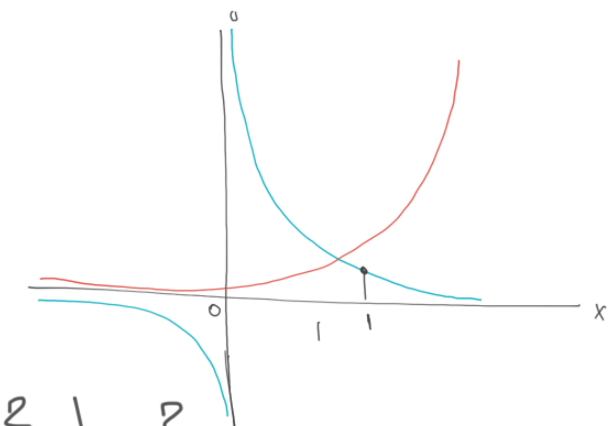
$$(f'(x))^2 > |f f''|$$

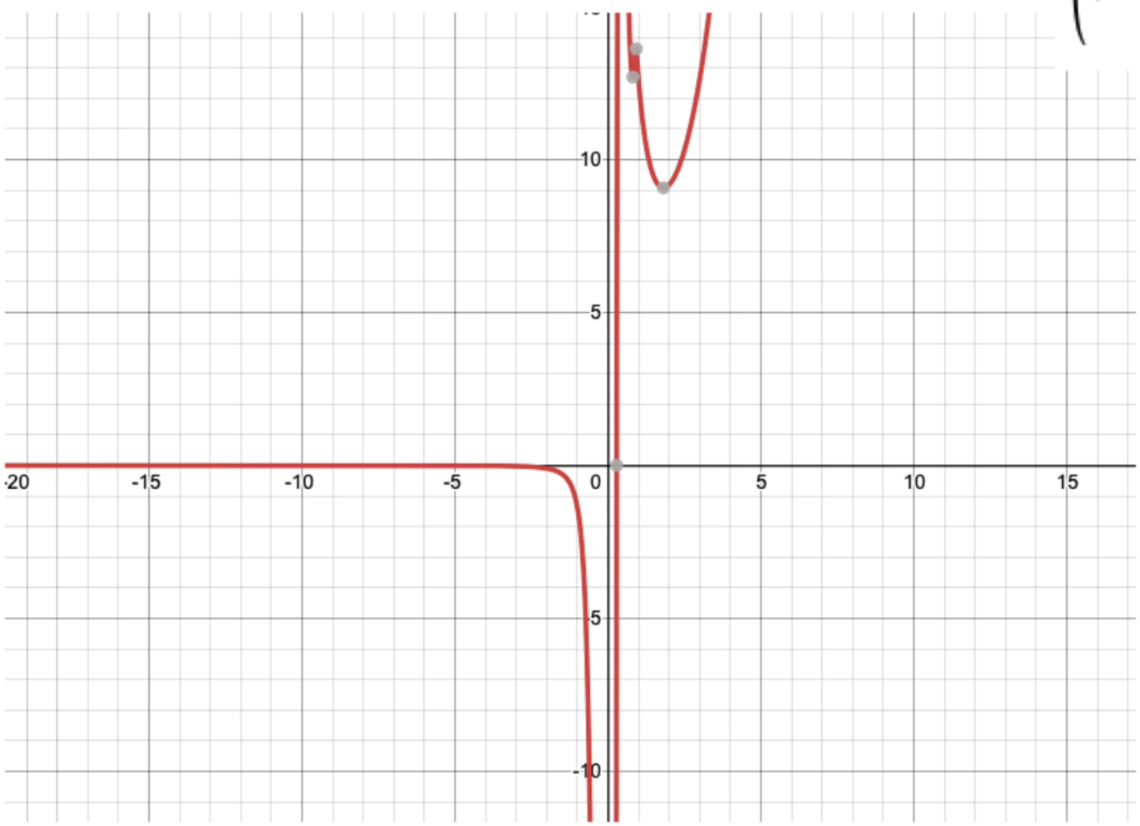
$$\left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad \left(e^x - \frac{1}{x}\right)\left(e^x - \frac{2}{x^3}\right)$$

+

$$\cancel{e^{2x}} - 2e^x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} > \vee \; \cancel{e^{2x}} - e^x\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) + \frac{2}{x^4}$$

$$e^{2x} - \frac{2}{x^2}e^x + \frac{1}{x^4} \; ? \; -e^{2x} + e^x\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^4}$$

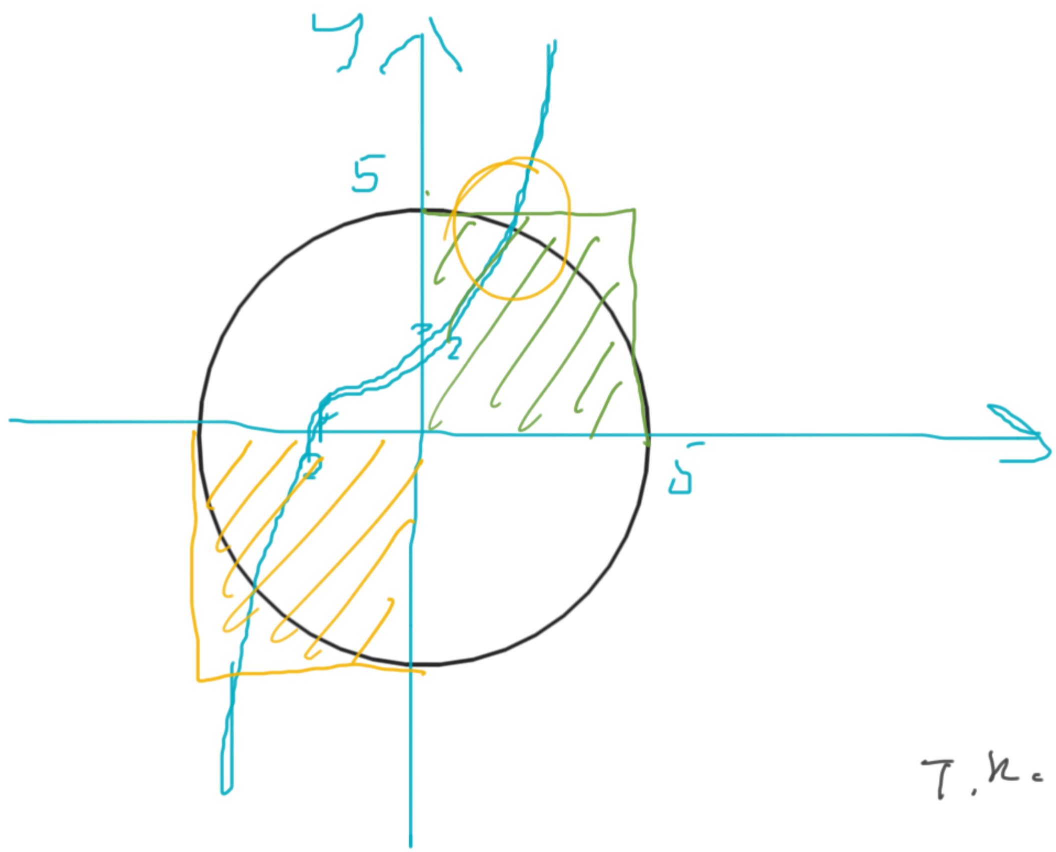




$$\left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \left|\left(e^x - \frac{1}{x}\right)\left(e^x - \frac{2}{x^3}\right)\right|$$

IV.11.24

$$\begin{cases} x^2+y^2-25=0 \\ (x+1)^3-y+1=0 \end{cases}$$



МПИ

$$x^{k+1}=f_1(x^k,y^k)$$
$$y^{k+1}=f_2(x^k,y^k)$$

J

$$y^{k+1}=(x+1)^3+1$$
$$x^{k+1}=\sqrt{25-y^2}$$

Аристова, Лобанов, Завьялова ч. I

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3(x+1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{2y}{2\sqrt{25-y^2}} \end{pmatrix}$$

т.к. $x>0 \longrightarrow$ наш МПИ не сходится

Теорема 5. (Достаточное условие сходимости МПИ). *Пусть область* $\Omega \subseteq \mathrm{R}^N$ *выпуклая, а компоненты* $f_i(\mathbf{u})$ *вектор-функции* $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1, \ldots, f_n(\mathbf{u}))^m$ *имеют равномерно непрерывные производные первого порядка. Пусть норма матрицы Якоби*

$$\tilde{\mathbf{J}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

не превосходит некоторого числа q, $0 < q < 1$, т.е. $\left\|\tilde{\mathbf{J}}\right\| \le q \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega$, *тогда отображение* $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ *является сжимающим в* Ω.

IV.7. Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений

Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений (6.1) является обобщением метода Ньютона для одного нелинейного уравнения. Линеаризуем систему уравнений (6.1) в окрестности предыдущего приближения

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}^{k+1}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{J}\cdot(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) = 0.$$