§4. Линейные ОДУ.

4.1. Линейные ОДУ n-го порядка: основные понятия.

Определение. Линейным ОДУ n-го порядка называется уравнение вида
$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = b(x), \tag{1.1}$$

Неизвестные функции и все ее производные входят в ОДУ (1.1) ЛИНЕЙНО (т.е. в первой степени).

Определение ЛОДУ n-го порядка (1.1) называется ***однородным***, если $b(x) \equiv 0\ \forall x \in I$.
В противном случае оно называется ***неоднородным***.

Определение. Функция $F\left(x, yy', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ называется ***однородной функцией аргументов*** $yy', \dots, y^{(n)}$, если $\forall t > 0$
$F\left(x, tyty', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, yy', \dots, y^{(n)}\right)$,
где m - показатель однородности.

$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0$ - (1.2)
однородное относительно искомой функции и ее производных с показателем однородности $m = 1$.

ЛОДУ (1.1) и (1.2) часто записывают в виде
$$Ly = b(x), \tag{1.1a}$$
$$Ly = 0, \tag{1.2a}$$
где $Ly = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x)$ - дифференциальный оператор порядка n.

Замечание 1.1. Уравнения (1.1a) и (1.2a) - "стенографический трюк".
Переход на лаконичный стиль очень часто производит качественный скачок в свободе мышления и манипулирования:
от детальной записи (1.1) порой рябит в глазах,
суть не видна: "за деревьями леса не видно".

Замечание 1.2. В дальнейшем будем считать $a_0(x) \equiv 1$, так как $a_0(x) \neq 0$ (иначе изменился бы порядок ОДУ) и на него можно смело делить:
$a_k(x) := \frac{a_k(x)}{a_0(x)}$, $b(x) := \frac{b(x)}{a_0(x)}$.

Пусть E - линейное пространство,
т.е. в E определено
- сложение элементов,
- умножение на число (действительное или комплексное).

Определение. Заданный на E оператор A называется линейным,

если $\forall y_1, y_2 \in E$ и любых чисел C_1, C_2 справедливо равенство
$A(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 A y_1 + C_2 A y_2$.

Лемма[1] 1.1. L - линейный оператор.

○ (Адамар) Пусть C_1 и C_2 постоянные (числа).
Так как
$\left(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\right)^{(k)} = C_1 y_1^{(k)}(x) + C_2 y_2^{(k)}(x)$,
то, умножая обе части на a_{n-k} при $k = \overline{0, n}$
и суммируя по k от 0 до n, получим
$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L y_1 + C_2 L y_2$$
●

Теорема[2] 1.1. (принцип суперпозиции)
Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2a)), то их линейная комбинация
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
при любых значениях постоянных C_1 и C_2 является решением однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2a)).

○ $L y_1(x) = 0$, $L y_2(x) = 0$ по условию.
По **лемме 1.1** L - линейный оператор.
По определению линейного оператора
$L y(x) = L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L y_1 + C_2 L y_2 = 0$,
т.е. $y(x)$ - решение однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2a)).
●

Замечание 1.3. Для неоднородных ЛОДУ (1.1) (или (1.1a)) **принцип суперпозиции** (в такой формулировке) не выполняется.
Строго говоря, неоднородное ЛОДУ (1.1) не является линейным, хотя его и принято так называть.
Есть модификации **принципа суперпозиции** для неоднородных ЛОДУ.

Теорема 1.2. (ПС1)
Если $y_1(x)$ - решение неоднородного ЛОДУ
$L y = b_1(x)$,
а $y_2(x)$ - решение неоднородного ЛОДУ
$L y = b_2(x)$,
то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ - решение неоднородного ЛОДУ
$$L y = b_1(x) + b_2(x)$$

○ Действительно, в силу линейности дифференциального оператора L:
$L y(x) = L\left(y_1(x) + y_2(x)\right) = L y_1(x) + L y_2(x) = b_1(x) + b_2(x)$.
●

Теорема 1.3. (ПС2)

---

[1] λήμμα - допущение.
[2] θεωρημα - зрелище, представление (Архимед: рассматриваю, обдумываю).

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения неоднородного ЛОДУ (1.1) (или (1.1a)), то их разность

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

есть решение соответствующего однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2a)).

○ В силу линейности дифференциального оператора L:

$Ly(x) = L\big(y_1(x) - y_2(x)\big) = Ly_1(x) - Ly_2(x) = b(x) - b(x) = 0.$

●

Следствие. Всякое решение неоднородного ЛОДУ (1.1) (или (1.1a)) есть сумма

- частного (т.е. фиксированного) решения неоднородного ЛОДУ (1.1)
- и некоторого решения однородного ЛОДУ (1.2).

○ Пусть

$y = y_p + y_o,$

где

$Ly_p = b(x),$

$Ly_o = 0.$

В силу линейности дифференциального оператора L:

$Ly(x) = L\left(y_p(x) + y_o(x)\right) = Ly_p(x) + Ly_0(x) = b(x) + 0 = b(x).$

●

Задача Коши для ОДУ n-го порядка в нормальной форме (форме Коши) ставится следующим образом:

найти решение ОДУ

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

на I, $x_0 \in I$, при условиях

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$

которые принято называть ***начальными***.

Теорема 1.4. (существования и единственности для ОДУ n-го порядка)[3]

Пусть в $\widetilde{\Omega} \subset \mathrm{R}^{1+n}_{x,y,y',\dots,y^{(n-1)}}$

- функция $f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, ... , $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ - непрерывны,
- точка $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \widetilde{\Omega}$.

Тогда при НУ (начальных условиях)

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

уравнение

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

имеет единственное решение в некоторой окрестности точки $(x_0) \in I$.

4.2. ЛОДУ 1-го порядка.

[3] Пока только формулировка! Доказательство на лекции 15 в общем случае.

$y' + a(x)y = b(x)$ (2.1)

ЛОДУ 1-го порядка в нормальной форме Коши

$y' = b(x) - a(x)y.$

Замечание 2.1. Если $a(x) \in C(I)$, $b(x) \in C(I)$, $I \subseteq \mathrm{R}$,
то $f(x) = b(x) - a(x)y$ и $f_y = -a(x)$ непрерывны на I,
следовательно, существует единственное решение задачи Коши по **теореме существования и единственности**.

Замечание 2.2. При $a(x) \in C(I)$, $b(x) \in C(I)$, $f(x) \in C(I)$ и $f_y \in C(I)$
$|f(x)| \le |a(x)||y| + |b(x)|$,
следовательно, по **теореме о продолжимости на весь заданный интервал**, считая $I = \mathrm{R}$, получаем, что решение задачи Коши продолжимо на R.
Т.о., для ЛОДУ 1-го порядка **теорема существования и единственности** носит глобальный характер.

Замечание 2.3. Если y_o: $y_o' + a(x)y_o = 0$,
то Cy_o - решение (общее) однородного ЛОДУ
$y' + a(x)y = 0.$
(2.2)

Замечание 2.4. Любое решение (2.1) представимо в виде
$y = Cy_o + y_p$,
где y_p - какое-либо решение (2.1),
а Cy_o - решение (общее) (2.2).

Теорема 2.1. Общее решение ЛОДУ 1-го порядка (2.1) находится двумя квадратурами.

○Доказательство методом Бернулли.

Решение (2.1) будем искать в виде

$y(x) = u(x) \cdot v(x).$

Тогда

$$u' \cdot v + u \cdot v' + auv = b$$

или

$u' \cdot v + u(v' + av) = b.$

Пусть $v(x)$:

$v' + av = 0,$ (2.2)

т.е. $v(x)$ - решение однородного ЛОДУ (2.2), которое является уравнением с разделяющимися переменными.

① $v = 0$ - решение (2.2).

② $v \ne 0 \rightarrow \frac{dv}{v} = -a dx \rightarrow ln|v| = -\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi + \tilde{C}$, $\tilde{C} \in \mathrm{R}$,

т.е. $|v| = \hat{C}e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}$, $\hat{C} \ge 0$ с учетом случая ①.

Раскрывая модуль, получаем

$v(x) = \breve{C} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$, $\breve{C} \in \mathrm{R}$.

При этом

$u' \cdot v = b$.

Если $b \neq 0$, то и $v \neq 0$ $\left(\breve{C} \neq 0\right)$. Тогда

$u' = \frac{b}{v} = \frac{1}{\breve{C}} b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$,

следовательно,

$u = \frac{1}{\breve{C}} \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi) d\xi} d\eta + C_1$.

$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \left(\frac{1}{\breve{C}} \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi) d\xi} d\eta + C_1\right) \breve{C} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$.

Откуда

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi} \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi) d\xi} d\eta + C e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}, \qquad (2.3)$$

где $C = C_1 \cdot \breve{C}$.

●

Замечание 2.5. Существование решения ЛОДУ 1-го порядка (2.1)доказали и без теоремы существования и единственности - мы его нашли.

❶ При фиксированном значении C получим частное решение ЛОДУ (2.1)

Например, при $C = 0$

$y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi} \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi) d\xi} d\eta$.

❷ При $b(x) \equiv 0$ имеем решение (общее) однородного ЛОДУ (2.2)

$y_o(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$.

Утверждение 2.1. Если $y = y_p(x)$ - известное частное решение неоднородного ЛОДУ

(2.1), то общее решение (2.1) находится одной квадратурой.

○ **I.** Следствие теоремы 2.1

II. По <u>следствию</u> **теоремы 1.3**

$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$.

А $y_o(x)$ - решение однородного ЛОДУ (2.2)

$$y_0' + a y_0 = 0 - \qquad (2.2)$$

ОДУ с разделяющимися переменными находится одной квадратурой[4]

$y_o(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$.

●

Утверждение 2.2. Если известны два различных частных решения неоднородного ЛОДУ (2.1), то общее решение (2.1) находится без квадратур.

○ $y(x) = C\left(y_{p_1}(x) - y_{p_2}(x)\right) + y_{p_1}(x)$ -

это следствие **теоремы 1.3** (ПС2).

●

---

[4] См. доказательство **теоремы 2.1**.

Теорема 2.2. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

существует и единственно $\forall x_0 \in I$ и $\forall y_0 \in R$ на всем I.

○ Решение (2.1) нашли - формула (2.3)

$\forall x_0 \in I$ и $\forall y_0 \in R$ имеем

$y_0 = y(x_0) = e^0 \cdot 0 + Ce^0 = C.$

Т.о., постоянная C определяется единственным образом.

$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta \right]$ -

решение (2.1) на всем промежутке I.

●

Замечание 2.6. В случае ЛОДУ 1-го порядка получается, что **теорема существования и единственности** (**теоремы 2.2**) носит не локальный, а ГЛОБАЛЬНЫЙ характер.

Замечание 2.7. Формулу (2.3) редко используют на практике.

Обычно находят решение однородного ЛОДУ (2.2) методом разделения переменных,

а затем для поиска частного решения применяют

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННОГО[5]

См. **теорему 2.1** (метод Бернулли):

находим решение однородного ЛОДУ (2.2)

$y_o(x) = \breve{C} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}$.

Затем полагаем $\breve{C} = \breve{C}(x)$:

$$\breve{C}'(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + \underline{\breve{C}(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} \cdot \big(-a(x)\big)} + \underline{a(x)\breve{C}(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}} = b(x),$$

т.е.

$$\breve{C}'(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} = b(x)$$

или

$\breve{C}'(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}$.

Интегрируем

$$\breve{C}(x) = \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta + C$$

и подставляем в решение однородного уравнения

$y_o(x) = \breve{C} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} = \left(\int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta + C \right) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}$ -

получили формулу (2.3).

---

[5] Лагранж (1762, 1765, 1775)
Эйлер (Сочинение о приливах и отливах)
Д. Бернулли (1740)

Гл. II. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

§1. Общая теория ЛОДУ.

Вспоминаем (Лекция 3 § 3):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = b(x) \tag{1.1}$$

$$Ly = b(x), \tag{1.1a}$$

где $L = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$ - линейный дифференциальный оператор (см. гл. I §4 - л. 3).

$$x \in I$$

$a_k(x) \in C(I)$, $a_0(x) \neq 0\ \forall x \in I$, $\quad b(x) \in C(I)$.

Пример 1.1. $a_0(x) \neq 0$ существенно:

□ $x^2 y'' - 2y = 0$.

Из ДУ $y(0) = 0$,

Решение ДУ $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$ при $x \neq 0$.

■

Полезно вспомнить принципы суперпозиции (лекция 3 §4).

Определение. Будем говорить, что функции $u_1(x), \dots, u_p(x)$ ***линейно зависимы*** на промежутке I, если $\exists C_j = const$, $\overline{j = 1, p}$ не все равные нулю: $\sum_{j=1}^{p} (C_j)^2 \neq 0$, - такие, что имеет место тождество

$$\sum_{j=1}^{p} C_j u_j(x) \equiv 0.\ \forall x \in I \tag{1.2}$$

В противном случае (т.е. если $\forall x \in I$ (1.2) выполняется только при $C_j = 0$, $\overline{j = 1, p}$) будем говорить, что функции $u_1(x), \dots, u_p(x)$ ***линейно независимы***.

!!! постоянные C_j, $\overline{j = 1, p}$ одни и те же для всего промежутка I !!!

Определение. Определителем Вронского (вронскианом) системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ назовем детерминант

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Будем сначала рассматривать однородные ЛОДУ

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0 \tag{1.3}$$

или

$$Ly = 0 \tag{1.3a}$$

Теорема 1.1. Если решения (1.3) ((1.3а)) линейно зависимы на I, их вронскиан
$W(x) \equiv 0$ на I.

Замечание 1.1. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом: Если функции линейно зависимы на I, их вронскиан $W(x) \equiv 0$ на I.
Т.е. верна как для решений (3), так и для произвольных функций, обладающих достаточной гладкостью.

○ Согласно определению линейной зависимости $y_1(x), \dots, y_m(x)$, $1 < m \le n$
$\exists C_j = const, \overline{j = 1, m}$: $\sum_{j=1}^{m} (C_j)^2 \neq 0$ и
$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j(x) \equiv 0 \ \forall x \in I$.
Дифференцируя это тождество $(m-1)$ раз, получаем
$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j'(x) \equiv 0$,
$\vdots$
$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j^{(m-1)}(x) \equiv 0$.
$\forall x \in I$ эти соотношения можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1, \dots, C_m$.
Эта система имеет нетривиальное решение ⇔ когда ее определитель равен нулю, т.е. $W(x) = 0 \ \forall x \in I$.
Ч.т.д. ●

Следствие (теоремы 1.1). Решения ДУ (3) ((3а)) линейно независимы на I, если
$\exists x_0 \in I$: $W(x_0) \neq 0$.

Замечание 1.2. Это следствие может быть сформулирована следующим образом:
Функции линейно независимы на I, если $\exists x_0 \in I$: $W(x_0) \neq 0$.
Т.е. верно как для решений (3), так и для произвольных функций, обладающих достаточной гладкостью.

○ Доказательство "от противного":
Пусть $y_1(x), \dots, y_m(x)$, $1 < m \le n$ линейно зависимы на I,
т.е. $\exists C_j = const, \overline{j = 1, m}$: $\sum_{j=1}^{m} (C_j)^2 \neq 0$ и
$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j(x) \equiv 0 \ \forall x \in I$.
По теореме 1.1. $W(x) \equiv 0$ на I, т.е. и $W(x_0) = 0$, что противоречит условию.
Следовательно предположение неверно,
и $y_1(x), \dots, y_m(x)$, $1 < m \le n$ линейно независимы.
●

Пример 1.2.[6] Детерминант Вронского для функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ равен нулю при всех x.
Могут ли эти функции быть линейно зависимыми?
Линейно независимыми?

□ Чуть позже (**теорема 1.2**) докажем, что если эти функции являются решениями однородного ЛОДУ n -го порядка, то они линейно зависимы.
Если это не так, то ничего не можем сказать:
① $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = 2x$ - линейно зависимы: $2y_1 - y_2 = 0$.

[6] Ф665

$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\forall x$ (что и следовало ожидать по **теореме 1.1**).

② $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = |x|x$ - линейно независимы на $I = [-1,1]$.

при $x < 0$ $W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$,

$W_{y_1,y_2}(0) = 0$,

при $x > 0$ $W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$.

Заметим, что $y_1(x) = x^2 \in C^2(I)$,

а $y_2(x) = |x|x \in C^1(I)$: $y_2(x) = \begin{cases} x^2, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -x^2, x < 0, \end{cases}$ $y_2'(x) = \begin{cases} 2x, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -2x, x < 0. \end{cases}$

■

Постановка **ЗАДАЧИ КОШИ** для ЛОДУ (1.1) ((1.1a)):

Найти решение ЛОДУ (1.1) на I, если $x_0 \in I$

и выполнены **начальные условия**

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{1.4}$$

Приведем пока только формулировку теоремы существования и единственности для ЛОДУ. Докажем в общем случае позже - лекция 14, в случае СЛОДУ с постоянными коэффициентами, к которым сводится ЛОДУ с постоянными коэффициентами (см. **замечание 1.2** лекции 10) - докажем **теорему 4.2** (лекция 13).

Теорема существования и единственности.

Если $a_k(x) \in C(I)$, $a_0(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, $b(x) \in C(I)$,
то решение задачи Коши (1.1)-(1.4) существует и единственно.

Теорема 1.2. Пусть $y_1, \dots, y_n$ решения (1.3) ((1.3a)) n -го порядка на I.

Если $\exists x^* \in I$: $W(x^*) = 0$, то эти решения линейно зависимы на I.

○ $W(x^*) = 0$, т.е. его столбцы линейно зависимы,

следовательно, $\exists C_j = const, \overline{j = 1, n}$: $\sum_{j=1}^{n} (C_j)^2 \neq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \begin{pmatrix} y_j(x^*) \\ y_j'(x^*) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(x^*) \end{pmatrix} \equiv 0$$

или

$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(l)}(x^*) \equiv 0$, $l = \overline{0, (n-1)}$.

Рассмотрим функцию $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x)$:

- это решение ЛОДУ (1.3)
- с начальными данными $\begin{pmatrix} y(x^*) \\ y'(x^*) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x^*) \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Но функция $y(x) = 0$ является решением поставленной задачи Коши.

По теореме существования и единственности других решений нет, следовательно $y_1, \dots, y_n$ - линейно зависимы.●

Следствие (теоремы 1.2 - альтернатива вронскиана).

Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ - решения однородного ЛОДУ (1.3) n -го порядка. Тогда $\forall x \in I$

$$W(x) \begin{cases} \equiv 0 & \Leftrightarrow y_1(x), \dots, y_n(x) \quad -\textit{линейнозависимы}, \\ \neq 0 & \Leftrightarrow y_1(x), \dots, y_n(x) \quad -\textit{линейнонезависимы}. \end{cases}$$

Замечание1.3. В Теореме 2 именно $\underline{n}$ решений для уравнения n-го порядка.

Рассмотрим ОДУ $y^{IV} = 0$.

Оно легко интегрируется: $y''' = C_1$, $y'' = C_1x + C_2$, $y' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$, $y = C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$.

Таким образом , $y = D_1x^3 + D_2x^2 + D_3x + D_4$ - решение.

Рассмотрим $y_1 = x^3$ и $y_2 = x^2$ при $x \in I = [-1,1]$.

Вронскиан $W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{vmatrix}$. $W(0) = 0$, но $y_1 = x^3$ и $y_2 = x^2$ линейно независимы на I.

Для $y_1 = x^3$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x$ и $y_4 = 1$ при $x \in I = [-1,1]$ вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \\ 6x & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \text{ согласно теории.}$$

Определение. ***Фундаментальной системой решений*** (ФСР) однородного ЛОДУ (1.3) будем называть любые n линейно независимых решений (1.3).

Теорема 3. Однородное ЛОДУ (3) ((3a)) имеет ФСР.

○ Определим n решений однородного ЛОДУ (1.3) так, чтобы они удовлетворяли следующим начальным условиям при $x_0 \in I$:

$y_k(x_0) = \delta_{k1}$,

$y_k'(x_0) = \delta_{k2}$,

$\vdots$

${y^{(n-1)}}_k(x_0) = \delta_{kn}$, $k = \overline{1,n}$.

Здесь $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0 & k \neq j \end{cases}$ - дельта символ Кронекера.

Тогда $W(x_0) = det\, E = 1$.

Поэтому по следствию **теоремы 1.1** $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы, т.е. образуют ФСР.

●

Замечание 1.4. При доказательстве теоремы в качестве НУ для построения $y_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, можно выбирать k -ый столбец любой невырожденной матрицы $A_{n\times n}$.

Поскольку существует бесконечно много матриц размера $n\times n$, определитель которых отличен от нуля, то для каждого однородного ЛОДУ (1.3) существует бесконечно много ФСР.

Кроме того, линейное невырожденное преобразование

$$\tilde{y}_k(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}y_k(x)$$

переводит одну ФСР в другую.

Аналогию с базисом в n - мерном пространстве решений завершает следующая теорема

Теорема 1.4. Если $y_1(x),\dots,y_n(x)$ ФСР однородного ЛОДУ (1.3),
то любое его решение $y=\phi(x)$ представимо в виде
$\phi(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$, (1.5)
где $C_1,\dots,C_n$ - произвольные постоянные.

○ Пусть $\phi(x)$ такое решение (1.3), что для $x_0\in I$

$$\begin{aligned}&\phi(x_0)=\hat{y}_0,\\&\phi'(x_0)=\hat{y}_1,\\&\vdots\\&\phi^{(n-1)}(x_0)=\hat{y}_{n-1}.\end{aligned}\qquad\text{(НУ)}$$

Рассмотрим $\tilde{y}(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$. Согласно принципу суперпозиции это решение ЛОДУ (1.3).

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x_0)=\hat{y}_0,\\ \quad\vdots\\ \sum_{k=1}^{n}C_k {y^{(n-1)}}_k(x_0)=\hat{y}_{n-1}\end{cases}$$ - система относительно $C_1,\dots,C_n$.

Она имеет единственное решение в силу того, что $W(x_0)\neq 0$.

Следовательно, $\tilde{y}(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$ удовлетворяет (НУ).

По **теореме существования и единственности** решение задачи Коши (1.3) - (НУ) единственно,

т.о., $\tilde{y}(x)\equiv\phi(x)$,

т.е. $\phi(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$, ч.т.д.

●

Замечание1.5. $y(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$, где $C_k=const$, $k=\overline{1,n}$, а $y_1(x),\dots,y_n(x)$ - ФСР, есть <u>общее решение</u> однородного ЛОДУ (1.3):

- эта формула содержит все решения (1.3),
- любое решение (1.3) представимо этой формулой.

Вернемся к неоднородному ЛОДУ (1.1).

Теорема 1.5. Если $y_1(x),\dots,y_n(x)$ ФСР однородного ЛОДУ (1.3),
а $y_p(x)$ - частное решение неоднородного ЛОДУ (1.1) ((1.1a)),

то любое решение (1.1) ((1.1a)) представимо в виде
$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x),$
(1.6)
где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

○ Рассмотрим $\hat{y}(x) = y(x) - y_p(x)$ - разность решений (1.1) ((1.1a)).
По ПС2 (лекция 3) $L\hat{y}(x) = 0$,
т.е. $\hat{y}(x)$ - решение однородного ЛОДУ (1.3).
Следовательно, по **теореме 1.4** $\hat{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$.
Откуда $y(x) = y_p(x) + \hat{y}(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$.
Ч.т.д.
●

Замечание 1.6. Теорема 1.5 справедлива при любом выборе частного решения $y_p(x)$.

Замечание 1.7. Теорему 1.5 можно сформулировать следующим образом:
Общее решение неоднородного ЛОДУ есть сумма
- частного решения неоднородного ЛОДУ и
- общего решения однородного ЛОДУ.

<u>Алгоритм построения решения</u> ЛОДУ (1) ((1a)):
❶ находим ФСР,
❷ находим частное решение (1.1),
❸общее решение (1.1) строим по формуле (1.6).

Теорема 1.6. (метод вариации произвольных постоянных - метод Лагранжа)
Если известна ФСР соответствующего (1.1) однородного ЛОДУ (1.3), то общее решение неоднородного ЛОДУ (1.1) может быть найдено при помощи квадратур.

○ $a_0(x) \neq 0\ \forall x \in I$
Разделим тогда в (1.1) все коэффициенты и правую часть на $a_0(x)$:
$d_k(x) = \frac{a_k(x)}{a_0(x)}, k = \overline{1,n}, f(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$.
Неоднородное ЛОДУ (1.1) примет вид
$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} d_k(x) y^{(n-k)}(x) = f(x),$
(1.1б)
а однородное ЛОДУ (1.3)
$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} d_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0.$
(1.3б)
Общее решение (1.3б) имеет вид
$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x),$
где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные,
а $y_1(x), \dots, y_n(x)$ - ФСР (1.3б).
<u>Цель</u>: получить решение (1.1б) в форме (1.5), но при $C_k = C_k(x)$, $k = \overline{1,n}$: $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x)$.
- Получили n неизвестных функций,
- для определения которых надо n уравнений.

Одно уже есть - (1.1б): $(\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x))^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} d_j(x)(\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x))^{(n-j)} = f(x)$.
Встает вопрос: как получить остальные?
Можем задать произвольно, но будем задавать так, чтобы выражения для производных имели наиболее простой вид:
① $y'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k'(x)$.
1-е: $\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k(x) = 0$,
и $y'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k'(x)$ - как и в случае $C_k = const$, $k = \overline{1,n}$.
② $y''(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k'(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k''(x)$.
2-е: $\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k'(x) = 0$,
и $y''(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k''(x)$.
И т.д.
◎ $(n-1)$-е $\sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-2)}(x) = 0$,
и $y^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x){y_k}^{(n-1)}(x)$.
И, наконец
$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x){y_k}^{(n)}(x)$.
Подставим все полученные таким образом $y^{(m)}(x)$, $m = \overline{1,n}$ в (1.1б):
$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x){y_k}^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} d_j(x)\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(x){y_k}^{(n-j)}(x)\right) = f(x)$,
или
$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x){y_k}^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j(x){y_k}^{(n-j)}(x)\right) = f(x)$,
или
$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left({y_k}^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} d_j(x){y_k}^{(n-j)}(x)\right) = f(x)$.
По условию $y_k(x)$, $k = \overline{1,n}$ образуют ФСР,
поэтому ${y_k}^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} d_j(x){y_k}^{(n-j)}(x) = 0$, $k = \overline{1,n}$.
Следовательно,
$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-1)}(x) = f(x)$.
Таким образом, получили систему относительно $C_k'(x)$, $k = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k'(x) = 0, \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x){y_k}^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}, \text{ или } W(x)\begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

$W(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, следовательно, находятся $C_k'(x) = h_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, единственным образом.
И квадратурами находим
$C_k(x) = \int h_k(x)\,dx + \tilde{C}_k$,
где $\tilde{C}_k$, $k = \overline{1,n}$, - новые произвольные постоянные.
Подставляя найденные значения $C_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, в (1.5), получаем
$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int h_k(x)\,dx$.
По построению это решение неоднородного ЛОДУ (1.1б):
$\sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k y_k(x)$ - общее решение однородного ЛОДУ (1.3б),

- $\sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int h_k(x)\, dx$ - частное решение неоднородного ЛОДУ (1.1б).

§2. Однородные ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

❶ Знание ФСР обеспечивает возможность найти любое решение однородного ЛОДУ.
❷ Решение неоднородного ЛОДУ можно найти методом вариации постоянных (применением квадратур).

Существование ФСР доказано, остается пока открытым вопрос о ее нахождении.

☺ Для ЛОДУ с постоянными коэффициентами нахождение ФСР сводится к алгебраическим операциям, а именно, к решению алгебраического уравнения n -ой степени.

Пусть $x \in I \subset \mathrm{R}_x^1$.

Рассмотрим однородное ЛОДУ с постоянными коэффициентами $a_k = const \in \mathrm{R}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0\ \forall x \in I$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}(x) = 0 \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Здесь $y(x) \in C^{(n)}(I)$ - вообще говоря, комплекснозначная функция, n раз непрерывно дифференцируемая.

Замечание 2.2. Так как $a_0 \neq 0$, то (2.1) или (2.1а) можно отнормировать, разделив все коэффициенты на a_0. Поэтому, если не оговорено противное, в дальнейшем будем полагать, что $a_0 = 1$

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)}(x) = 0. \qquad (2.1н)$$

(2.1н) в операторной записи

$$Ly = 0, \qquad (2.1а)$$

где

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \text{ -} \qquad (2.2)$$

линейный дифференциальный оператор (см. гл. I §4 - лекция 3).

Вспомним ОДУ 1-го порядка:

$$y' + a_1 y = 0.$$

Его решение (общее)[7]

$$y = Ce^{-a_1 x}.$$

---

[7] $y = 0$ - решение,

при $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = -a_1 dx$ → $\frac{dy}{y} = -a_1 dx$, интегрируя, получим $\ln|y| = -a_1 x + c$, $c \in \mathbb{R}$, или $|y| = e^{-a_1 x + c} = \hat{C} e^{-a_1 x}$, $\hat{C} > 0$.

Раскрывая знак модуля и учитывая, что $y = 0$ - решение, получим $y = Ce^{-a_1 x}$, где $C \in \mathbb{R}$.

Будем решение (2.1н) искать в виде

$y = e^{\lambda x}$.

Получим:

$y' = \lambda e^{\lambda x}$,

$\vdots$

$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$,

$\vdots$

$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$.

Подставляя полученные производные решения в (2.1а), получим

$e^{\lambda x}(\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}) = 0$.

Определение. Полином

$$M(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}$$

называется ***характеристическим полиномом*** однородного ЛОДУ (2.1н) (или (2.1а)),

а уравнение

$M(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}$=0 - (2.3)

характеристическим уравнением для однородного ЛОДУ (2.1н) (или (2.1а))

По основной теореме алгебры характеристическое уравнение (2.3) имеет ровно n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Определение. Число λ_0 называется ***корнем кратности*** m уравнения (2.3), где $m \in \mathrm{N}$, $1 \le m \le n$, если

$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m M_1(\lambda)$,

где $M_1(\lambda) = P_{n-m}(x)$ - полином степени $(n - m)$, $M_1(\lambda_0) \neq 0$.

Замечание 2.3. Из формулы Тейлора для $M(\lambda)$ следует, что λ_0 корень кратности m характеристического полинома $M(\lambda)$ $\Leftrightarrow$ $M(\lambda_0) = M'(\lambda_0) = \ldots = M^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, а $M^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$.

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ - различные корни характеристического уравнения (2.3), а $m_1, \ldots, m_p$ - их кратности, соответственно, то

$M(\lambda) = \prod_{l=1}^{p} (\lambda - \lambda_l)^{m_l}$, (2.4)

При этом: ❶ $\forall l = \overline{1,p} 1 \le m_l \le n$,

❷ $\sum_{l=1}^{p} m_l = n$.

Определение. Число λ_0 называется простым корнем уравнения (2.3), если его кратность $m = 1$.

Для дальнейшего удобно ввести следующее обозначение оператора дифференцирования:
$D = \frac{d}{dx}$.

Так как
$D^k = \left(\frac{d}{dx}\right)^k = \underbrace{\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \ldots \frac{d}{dx}}_{k \text{сомножителей}} = \frac{d^k}{dx^k}$,
то в этих обозначениях (2.1a) принимает вид
$Ly = M(D)y = 0$.

Определение. Оператор $M(D)$ называется ***дифференциальным полиномом***.

Замечание 2.4. Дифференциальный полином $M(D)$ является линейным оператором (см. **лемму 3.1** лекции 3).

Замечание 2.5. Дифференциальный полином $M(D)$ имеет ту же структуру, что и характеристический полином $M(\lambda)$.

В дальнейшем нам понадобятся

ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ.

Рассмотрим линейные операторы

$$A(D) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D^{k-j} = \alpha_0 D^k + \alpha_1 D^{k-1} + \cdots + \alpha_k$$

и
$B(D) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j D^{m-j} = \beta_0 D^m + \beta_1 D^{m-1} + \cdots + \beta_m$.
Здесь $\alpha_j = const, j = \overline{0, k}$,
$\beta_j = const, j = \overline{0, m}$.

Правило сложения:

$[A(D) + B(D)]y = A(D)y + B(D)y$.

$A(D) + B(D)$ - дифференциальный полином степени $n = max\{k, m\}$.
$y \in \mathrm{C}^n(\mathrm{R}_x^1)$.

Правило умножения:

$A(D)[B(D)]y = [A(D)B(D)]y = [B(D)A(D)]y = B(D)[A(D)]y$.

$A(D)B(D) = B(D)A(D)$ - дифференциальный полином степени $n = k + m$.
$y \in \mathrm{C}^n(\mathrm{R}_x^1)$.

Проверяются непосредственной проверкой, как и коммутативность,

ассоциативность,
дистрибутивность.

🕮 Федорюк. "Обыкновенные дифференциальные уравнения" - можно посмотреть доказательство для $k = m = 1$.

Отсюда, в частности, следует, что дифференциальные полиномы можно раскладывать на множители:
действительно, полином $M(\lambda)$ раскладывается на множители
а полиномы от символа D $\big(M(D)\big)$ перемножаются по тем же правилам, что и полиномы от λ:
$M(D) = \prod_{l=1}^{p}(D - \lambda_l)^{m_l}$. (2.5)

Теорема 2.1. (Об общем решении ЛОДУ в случае простых корней характеристического полинома)
Пусть все корни характеристического уравнения простые (различные).
Тогда общее решение однородного ЛОДУ (2.1a) имеет вид
$y = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{\lambda_k x} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$.

○ Пусть λ_k, $k = \overline{1,n}$ - решения (различные) характеристического уравнения (2.3).
Пусть $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$.

❶ Покажем, что $\forall k = \overline{1,n}$ $y_k(x)$ - решения (2.1a):
$Ly_k(x) = M(D)y_k(x) = (D - \lambda_k)M_1(D)y_k(x) = M_1(D)[(D - \lambda_k)y_k(x)] =$
$= M_1(D)\big(Dy_k(x) - \lambda_k y_k(x)\big)$
Но $Dy_k(x) = \frac{d}{dx} y_k(x) = \frac{d}{dx} e^{\lambda_k x} = \lambda_k e^{\lambda_k x} = \lambda_k y_k(x)$.
Следовательно,
$Ly_k(x) = M_1(D) \cdot 0 = 0$,
т.е. $y_k(x)$ - решения (2.1a).

❷ Покажем, что $y_k(x)$. $k = \overline{1,n}$ образуют ФСР.

$$W(x) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & {\lambda_2}^{n-1} & & {\lambda_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k x} \cdot \prod_{1 \le j < i \le n}\big(\lambda_i - \lambda_j\big) \ne 0.$$

Следовательно, по **теореме 1.4** лекции 7
$y = \sum_{k=0}^{n} C_k y_k$,
где C_k - произвольные постоянные.
●

Лемма 2.1. (***формула сдвига***)
Если $\lambda \in \mathrm{C}$, то $\forall y \in C^n(\mathrm{R}_x^1)$ справедлива формула $M(D)\big[e^{\lambda x} y(x)\big] = e^{\lambda x} M(D + \lambda) y(x)$.

○ $\forall k \in \mathrm{N}$ по формуле Лейбница

$D^k\left[e^{\lambda x}y(x)\right] = \left(e^{\lambda x}y(x)\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)}\left(y(x)\right)^{(k-j)} =$
$\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j e^{\lambda x}\left(y(x)\right)^{(k-j)} == e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j \left(y(x)\right)^{(k-j)} =$
$e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j D^{k-j}\left(y(x)\right) = e^{\lambda x}\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j D^{k-j}\right)y(x) == e^{\lambda x}(\lambda + D)^k y(x) =$
$e^{\lambda x}(D+\lambda)^k y(x).$

Тогда

$M(D)\left[e^{\lambda x}y(x)\right] = e^{\lambda x}(D+\lambda)^n y(x) + \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda x} a_k (D+\lambda)^{n-k} y(x) == e^{\lambda x}[(D+$
$\lambda)^n + \sum_{k=1}^{n} a_k (D+\lambda)^{n-k}]y(x) = e^{\lambda x}M(D+\lambda)y(x).$

●

Теорема 2.2. (О решениях ЛОДУ в случае кратного корня характеристического полинома).

Если $\lambda = \lambda_0 \in \mathrm{C}$ корень кратности m характеристического уравнения (2.3), то каждая из функций вида

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$$

является решением однородного ЛОДУ (2.1а).

○ Пусть $y(x) = x^j e^{\lambda_0 x}$, $j = \overline{0,(m-1)}$.

$Ly(x) = M(D)y(x) = M(D)\left(x^j e^{\lambda_0 x}\right) = \left|\begin{matrix}\text{поформулесдвига}\\ \text{лемма2.1}\end{matrix}\right| = e^{\lambda_0 x}M(D+\lambda_0)x^j$

$M(D) = (D-\lambda_0)^m M_1(D)$, M_1 - полином степени $(n-m)$.

$M(D+\lambda_0) = (D-\lambda_0+\lambda_0)^m M_1(D+\lambda_0) = D^m M_1(D+\lambda_0) = M_1(D+\lambda_0)D^m.$

Т.о.,

$Ly(x) = e^{\lambda_0 x}M_1(D+\lambda_0)D^m x^j.$

Но

$D^m x^m = m!,$

и

$D^m x^j = 0, j = \overline{0,(m-1)}.$

Т.е.

$Ly(x) = e^{\lambda_0 x}M_1(D+\lambda_0)\cdot 0 = 0,$

т.о.,

$y(x) = x^j e^{\lambda_0 x}, j = \overline{0,(m-1)}$ -

решения (2.1а), ч.т.д.

●

Определение. Функция вида

$$f(x) = e^{\mu x}P_m(x), \tag{2.6}$$

где $\mu \in \mathrm{C}$ - задано, а $P_m(x)$ - заданный полином степени m, вообще говоря, с комплексными коэффициентами, называется квазиполиномом.

Следствие (теоремы 2).

Если $\lambda = \lambda_0 \in \mathrm{C}$ корень кратности mхарактеристического уравнения (2.3), то квазиполином $e^{\lambda_0 x}P_{m-1}(x)$ является решением однородного ЛОДУ (2.1а).

○ По теореме 2.2 и принципу суперпозиции (теорема 3.1 лекции 3) следует справедливость вышеприведенного утверждения.

●

Лемма 2.2. При дифференцировании квазиполинома с $\mu \neq 0$ получаем квазиполином той же степени.

○ $f(x) = e^{\mu x} P_m(x)$, $\mu \neq 0$,

$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j x^{m-j}$, $\alpha_0 \neq 0$.

$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{\mu x} P_m(x)\right) = \frac{d^k}{dx^k}\left(P_m(x) e^{\mu x}\right) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \left(e^{\mu x}\right)^{(k-l)} =$

$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \mu^{k-l} e^{\mu x} = e^{\mu x} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \mu^{k-l} = e^{\mu x} Q_m(x)$,

где $Q_m(x) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \mu^{k-l} = \sum_{j=0}^{m} q_j x^{m-j}$,

причем $q_0 = \alpha_0 \mu^k$ возникает только при $l = 0$[8].

$\mu \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$ по условию, следовательно $q_0 \neq 0$.

●

Теорема 2.3. (О ФСР однородного ЛОДУ).

Решения

$e^{\lambda_l x}, x e^{\lambda_l x}, x^2 e^{\lambda_l x}, \dots, x^{m_l - 1} e^{\lambda_l x}$, $l = \overline{1,p}$,

где λ_l - корень характеристического уравнения (2.3) кратности m_l, $1 \leq m_l \leq n$, $\sum_{l=1}^{p} m_l = n$,

образуют ФСР однородного ЛОДУ (2.1a).

○ Надо показать, что

① их n

и

② они линейно независимы,

следовательно образуют ФСР по определению.

❶ Решений n по построению.

❷ Осталось показать линейную независимость.

Доказательство "от противного":

предположим, что они линейно зависимы.

Тогда найдутся полиномы

$P_{\widetilde{m}_l - 1}(x) = \sum_{j=0}^{\widetilde{m}_l - 1} \alpha_{lj} x^{\widetilde{m}_l - 1 - j}$, $1 \leq \widetilde{m}_l \leq m_l$,

такие, что

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{j=0}^{\widetilde{m}_l - 1} \left(\alpha_{lj}\right)^2 \neq 0$$

и

$\sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{\widetilde{m}_l - 1}(x) \equiv 0 \ \forall x \in \mathrm{R}_x^1$.

То есть не все $P_{\widetilde{m}_l - 1}(x) \equiv 0$.

Пусть $P_{\widetilde{m}_1 - 1}(x) \equiv\!\!/\!\!\equiv 0$ (всегда можно перенумеровать корни характеристического уравнения (2.3)).

[8] как коэффициент при x^m.

Пусть $\alpha_{10} \neq 0$[9] $(1 \le \widetilde{m}_1 \le m_1)$.

Умножим $\sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{\widetilde{m}_l-1}(x)$ на $e^{-\lambda_p x}$. Получим

$0 \equiv e^{-\lambda_p x} \sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{\widetilde{m}_l-1}(x) \equiv \sum_{l=1}^{p-1} e^{(\lambda_l-\lambda_p)x} P_{\widetilde{m}_l-1}(x) + P_{\widetilde{m}_p-1}(x)$

Продифференцируем полученное тождество m_p $\left(1 \le \widetilde{m}_p \le m_p\right)$ раз (для надежности, так как степень полинома $P_{\widetilde{m}_p-1}(x)$ меньше равна m_p).

По **лемме 2.2** получим

$$0 \equiv \sum_{l=1}^{p-1} e^{(\lambda_l-\lambda_p)x} Q_{\widetilde{m}_l-1}(x)$$

или, умножив на $e^{\lambda_p x}$,

$0 \equiv \sum_{l=1}^{p-1} e^{\lambda_l x} Q_{\widetilde{m}_l-1}(x)$.

Проделывая аналогичную операцию (умножаем на $e^{-\lambda_{p-1} x}$, затем дифференцируем m_{p-1} раз), получим

$0 \equiv \sum_{l=1}^{p-2} e^{\lambda_l x} \hat{Q}_{\widetilde{m}_l-1}(x)$.

Продолжая процесс далее, получим

$0 \equiv e^{\lambda_1 x} S_{\widetilde{m}_1-1}(x)$

или

$0 \equiv S_{\widetilde{m}_1-1}(x)$ -

полином степени $\widetilde{m}_1$ $(1 \le \widetilde{m}_1 \le m_1)$ с коэффициентом s_{10} при старшей степени $x^{\widetilde{m}_1-1}$.

По построению

$s_{10} = \alpha_{10}\left(\lambda_1-\lambda_p\right)^{m_p}\left(\lambda_1-\lambda_{p-1}\right)^{m_{p-1}} \cdots (\lambda_1-\lambda_2)^{m_2} \neq 0.$

Полученное противоречие приводит к выводу, что эти решения линейно независимы,

ч.т.д.

А n линейно независимых решений образуют ФСР.

●

Следствие (теоремы 3).

Общее решение однородного ЛОДУ (2.1a) имеет вид
$y(x) = \sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{m_l-1}(x)$,
где λ_l - корень характеристического уравнения (2.3) кратности m_l,
$P_{m_l-1}(x) = \sum_{j=0}^{m_l-1} \alpha_{lj} x^{m_l-1-j}$, $\alpha_{lj} = const \in \mathrm{C}$, $\alpha_{l m_l-1} \neq 0\ \forall l = \overline{1,p}$.

○ По **теореме 3** $y_{lj_l}(x) = e^{\lambda_l x} x^{j_l}$, $l = \overline{1,p}$, $j_l = \overline{0, m_l-1}$, $1 \le m_l \le n$, $\sum_{l=1}^{p} m_l = n$, образуют ФСР.

По **теореме 1.4** лекции 7 $y(x) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j_l=0}^{m_l-1} C_{lj_l} y_{lj_l}(x)$, $C_{lj_l} = const$, $l = \overline{1,p}$, $j_l = \overline{0, m_l-1}$.

$\sum_{j_l=0}^{m_l-1} C_{lj_l} y_{lj_l}(x) = \sum_{j=0}^{m_l-1} C_{lj} y_{lj}(x) = \sum_{j=0}^{m_l-1} C_{lj} e^{\lambda_l x} x^{j_l} = e^{\lambda_l x} P_{m_l-1}(x)$.

Ч.т.д.

●

[9] коэффициент при старшей степени $x^{\widetilde{m}_1-1}$ полинома $P_{\widetilde{m}_1-1}(x)$.

§3. Выделение вещественных решений[10].

$x \in R$, а $y = y(x)$ может быть комплексной функцией вещественного аргумента.

Множество комплексных чисел обозначается через C[11].

Комплексное число $z = \alpha + i\beta \in C$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha = Re\, z$ - вещественная часть z, $\beta = Im\, z$ - мнимая часть z, i - мнимая единица.

Два комплесных числа $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ называются равными, если $\alpha_1 = Re\, z_1 = Re\, z_2 = \alpha_2$ и $\beta_1 = Im\, z_1 = Im\, z_2 = \beta_2$.

🕮 Половинкин "Курс лекций по ТФКП".

Определение. Евклидово пространство R^2, в котором введено произведение по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

называется ***множеством*** (или пространством) ***комплексных чисел*** C. Элементы множества C называются ***комплексными числами***.

Пример 2.1. $z_1 = i$, $z_2 = i$, $z_1 \cdot z_2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1$. ■

$y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, т.е. $\lambda = \alpha + i\beta$. Возникает вопрос, чему равно y?

Если $z = \alpha + i\beta \in C$, то сопряженное комплексное число $\overline{z} = \alpha - i\beta \in C$.

В дальнейшем будут полезны следующие свойства сопряженных чисел:[12]

$$\overline{\overline{z}} = z,$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Определение.[13] Для $z \in C$ положим

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$sin\, z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$cos\, z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

В курсе математического анализа было показано, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

и

$$e^{iz} = cos\, z + i\, sin\, z.$$

---

[10] ориентировано на поток Бесова

[11] О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу. Часть I. §9.3

[12] Там же.

[13] О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу. Часть I. §17.4

Также было доказано, что[14]

Если $P_n(z)$ - полином с действительными коэффициентами, и $z_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, его корень кратности m, то $\overline{z_0} = \alpha - i\beta$ также является его корнем кратности m.

Итак, $x \in R$, $y(x) \in C$.
Представим $y(x)$ в виде
$y(x) = u(x) + iv(x)$.
Здесь $u(x) = Re\, y\,(x)$, $v(x) = Im\, y\,(x)$.

Пример 2.2. $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, т.е. $\lambda = \alpha + i\beta$. Выделить вещественную $u(x)$ и мнимую $v(x)$часть $y(x)$.

□ $y = e^{\lambda x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta\, x + i\sin\beta\, x)$.
Тогда $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta\, x$, $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta\, x$.
■

Понятие производной комплексной функции вводится аналогично понятию производной функции в вещественном пространстве:
$f^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
Отсюда
$y^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u^{'}(x) + iv^{'}(x)$,
$y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)$.

Пример 2.3. $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, т.е. $\lambda = \alpha + i\beta$. Найти $y^{'}(x)$.

□ $y' = \frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}[e^{\alpha x}(\cos\beta\, x + i\sin\beta\, x)] = \frac{d}{dx}(e^{\alpha x}\cos\beta\, x) + i\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}\sin\beta\, x) =$
$= \underline{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta\, x} - \beta e^{\alpha x}\sin\beta\, x + i\alpha e^{\alpha x}\sin\beta\, x + \underline{i\beta e^{\alpha x}\cos\beta\, x} = = (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}\cos\beta\, x + (-\beta + i\alpha)e^{\alpha x}\sin\beta\, x = (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}\cos\beta\, x + i(\alpha + i\beta)e^{\alpha x}\sin\beta\, x = = (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta\, x + i\sin\beta\, x) = \lambda e^{\lambda x}$.
■

Лемма 3.1. (Выделение вещественных решений.)
Если коэффициенты ЛОДУ (1.3a)
$Ly = 0$ (1.3a)
вещественны,
и $y(x)$ - его комплексное решение,
то $u(x) = Re\, y\,(x)$ и $v(x) = Im\, y\,(x)$ также являются решениями (1.3a).

○ $y(x) = u(x) + iv(x)$.
$M(D)y(x) = 0$.
С другой стороны
$0 = M(D)y(x) = M(D)u(x) + iM(D)v(x)$.
Следовательно, $M(D)u(x) = 0$ и $M(D)v(x) = 0$.
●

[14] О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу. Часть I. §9.4: лемма 1.

Замечание 3.1. Если $y_1(x) \in C$ - решение (1.3а), то $y_2(x) = \overline{y_1}(x)$ также решение (1.3а).

Замена базиса в пространстве решений (ФСР) на вещественный
$\tilde{y}_1(x) = \frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}$, $\tilde{y}_2(x) = \frac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}$.

§4. Неоднородные ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

$$Ly = f(x) \tag{4.1}$$

ФСР находить уже умеем.

Методы нахождения частного решения:

1. метод вариации постоянных (лекция 7),
2. метод неопределенных коэффициентов (лекция 9).

Метод неопределенных коэффициентов позволяет найти частное решение ЛОДУ (4.1) без квадратур в случае, когда
$f(x) = e^{\mu x} P_s(x)$ -
квазиполином.

Замечание 4.1. $f(x) = e^{\alpha x} P_l(x) \cos\beta x$ тоже можно трактовать как квазиполином:
$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}$,
$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
где
$f_1(x) = P_l(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{2}$,
$f_2(x) = P_l(x)\frac{e^{(\alpha-i\beta)x}}{2}$.
!!! Коэффициенты $P_l(x)$ вещественны !!!
Для $f(x) = e^{\alpha x} P_l(x) \sin\beta x$ аналогично.

Теорема 4.1. Пусть правая часть (4.1) квазиполином вида $f(x) = e^{\mu x} P_s(x)$,
$\mu = const \in C$,
$P_s(x) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j x^{s-j}$, $\alpha_0 \neq 0$ - полином степени s.
Тогда существует частное решение (4.1), имеющее вид

$$y_{част}(x) = e^{\mu x} x^{m_l} Q_s(x), \tag{4.2}$$

где m_l - кратность корня характеристического уравнения (2.3) $\mu = \lambda_l$:

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = 0. \tag{2.3}$$

Замечание 4.2. Если μ является корнем характеристического уравнения (2.3), то говорят, что имеет место ***резонансный случай***.
Если μ не корень (2.3), то - ***нерезонансный случай***.

Замечание 4.3. Теорему докажем в резонансном случае, так как при отсутствии резонанса можно просто положить $m_l = 0$ в ходе доказательства.

○ Положим $Q_s(x)=\sum_{j=0}^{s} q_j x^{s-j}$, где $q_j=const\in R$ - произвольные (неопределенные) коэффициенты.

Подставим (4.2) в (4.1):

$$M(D)[e^{\mu x}x^{m_l}Q_s(x)]=e^{\mu x}P_s(x). \tag{4.4}$$

<u>Задача</u>: убедиться, что из (4.4) можно последовательно определить пока неизвестные коэффициенты $q_j,\ j=\overline{0,s}$.

$M(D)=\prod_{j=1}^{p}\left(D-\lambda_j\right)^{m_j}=(D-\lambda_l)^{m_l}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p}\left(D-\lambda_j\right)^{m_j}=(D-\lambda_l)^{m_l}M_1(D)$,

$\sum_{l=1}^{p} m_l=n$.

$P_s(x)=\alpha_0x^s+\sum_{j=1}^{s}\alpha_j x^{s-j}=\alpha_0x^s+P_{s-1}(x)$,

$Q_s(x)=q_0x^s+Q_{s-1}(x)$.

$M(D)[e^{\mu x}x^{m_l}Q_s(x)]=M(D)[e^{\mu x}q_0x^{s+m_l}]+M(D)[e^{\mu x}x^{m_l}Q_{s-1}(x)]$.

По **лемме 2.1** (формула сдвига) лекции 8:

❶ $M(D)[e^{\mu x}q_0x^{s+m_l}]=e^{\mu x}M(D+\mu)[q_0x^{s+m_l}]=e^{\mu x}\left(D+\underbrace{\mu-\lambda_l}_{=0}\right)^{m_l}M_1(D+\mu)[q_0x^{s+m_l}]==e^{\mu x}q_0M_1(D+\mu)D^{m_l}[x^{s+m_l}]=e^{\mu x}q_0M_1(D+\mu)\frac{(s+m_l)!}{s!}x^s==e^{\mu x}q_0\frac{(s+m_l)!}{s!}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p}\left(D+\mu-\lambda_j\right)^{m_j}x^s=e^{\mu x}q_0\frac{(s+m_l)!}{s!}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p}\left(\mu-\lambda_j\right)^{m_j}x^s+e^{\mu x}\hat{Q}_{s-1}(x)$.

❷ $M(D)[e^{\mu x}x^{m_l}Q_{s-1}(x)]=M(D)\left[e^{\mu x}\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right]=e^{\mu x}M(D+\mu)\left[\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right]==e^{\mu x}(D+\mu-\lambda_l)^{m_l}M_1(D+\mu)\left[\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right]=e^{\mu x}M_1(D+\mu)D^{m_l}\left[\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right]==e^{\mu x}M_1(D+\mu)\tilde{\tilde{Q}}_{s-1}(x)=e^{\mu x}Q*_{s-1}(x)$.

(4.4) принимает вид:

$e^{\mu x}q_0\frac{(s+m_l)!}{s!}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p}\left(\mu-\lambda_j\right)^{m_j}x^s+e^{\mu x}\left(\hat{Q}_{s-1}(x)+Q*_{s-1}(x)\right)=e^{\mu x}\left(\alpha_0x^s+P_{s-1}(x)\right)$.

Приравнивая коэффициенты при x^s слева и справа, находим q_0:

$q_0\frac{(s+m_l)!}{s!}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p}\left(\mu-\lambda_j\right)^{m_j}=\alpha_0$.

Перенесем все слагаемые, содержащие q_0 в правую часть (4.4)

$e^{\mu x}q_0M_1(D+\mu)\frac{(s+m_l)!}{s!}x^s+M(D)[e^{\mu x}x^{m_l}Q_{s-1}(x)]=e^{\mu x}P_s(x)\rightarrow$

$M(D)[e^{\mu x}x^{m_l}Q_{s-1}(x)]=e^{\mu x}P_{s-1}(x)-e^{\mu x}q_0M_1(D+\mu)\frac{(s+m_l)!}{s!}x^s=e^{\mu x}P_{s-1}(x)-e^{\mu x}\hat{Q}_{s-1}(x)==e^{\mu x}\tilde{P}_{s-1}(x)$.

Продолжая процесс, последовательно находим все остальные коэффициенты.

●

§5. Уравнение Эйлера.

Идея: Если с помощью замены сумеем ЛДУ с переменными коэффициентами преобразовать в ЛДУ с постоянными коэффициентами, то решив последнее, с помощью обратного преобразования найдем решение исходного ЛДУ в элементарных функциях.

Пример 5.1. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0,\ x\in(-1,1)$.

□ Замена $x=\cos\phi$:

$dx=-\sin\phi\, d\phi$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{dx}=\frac{-1}{\sin\phi}\frac{dy}{d\phi}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{-1}{\sin\phi}\frac{dy}{d\phi}\right)=\frac{-1}{\sin^3\phi}\cos\phi\frac{dy}{d\phi}+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{d^2y}{d\phi^2}$.

Подставляя найденные значения производных в исходное ОДУ, получаем

$$(1-\cos^2\phi)\left(\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{d^2y}{d\phi^2}-\frac{1}{\sin^3\phi}\cos\phi\frac{dy}{d\phi}\right)-\cos\phi\left(\frac{-1}{\sin\phi}\frac{dy}{d\phi}\right)+n^2y=0$$

или (после упрощения)

$\frac{d^2y}{d\phi^2}+n^2y=0$ - ЛОДУ с постоянными коэффициентами, однородное (умеем решать).

Характеристическое уравнение $\alpha^2+n^2=0$,

$\alpha^2+n^2=0$,

вещественная ФСР $y_1=\cos(n\phi),\ y_2=\sin(n\phi)$.

Возвращаясь к старой переменной $x=\arccos\phi$, $y_1=\cos(n\arccos\phi)$, $y_2=\sin(n\arccos\phi)$.

$T_n(x)=\cos(n\arccos\phi)$ - полином Чебышева.

■

В вышеприведенном примере усмотреть замену непосредственно нельзя, но есть один тип ОДУ, где такая замена может быть всегда указана:

$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\,(\alpha\tilde{x}+\beta)^{n-k}\tilde{y}^{(n-k)}(\tilde{x})=\tilde{f}(\tilde{x}),\ \tilde{a}_k=const\in R$ - (5.1)

общий вид уравнения Эйлера.

Замена $x=\alpha\tilde{x}+\beta$ с последующей нормировкой приводит (5.1) к виду

$\sum_{k=0}^{n}a_k\,x^{n-k}y^{(n-k)}(x)=f(x),\ a_k=const\in R,\ a_0=1$. (5.2)

Определение. Уравнением ***Эйлера*** называют ОДУ вида(5.2).

Замечание 5.1. При замене x на Cx, $C=const$ ОДУ (5.2) не меняется.

Т.о. замена $\begin{cases} y=y,\\ t=\ln x\end{cases}$ приведет уравнение Эйлера к инвариантному относительно сдвига виду, т.е. не содержащему независимого переменного t.

Замечание 5.2. ОДУ (5.2) при замене $x=e^t$ останется линейным, но станет уже ОДУ с ПостК (не содержит t).

Замечание 5.3. При $x=0$ особенность. $x=e^t>0$, при $x<0$ замена $x=-e^t<0$.

Наряду с обозначением оператора дифференцирования (Лекция 7) по переменной x

$$D = \frac{d}{dx}$$

вводим в рассмотрение обозначение оператора дифференцирования по новой переменной t

$$T = \frac{d}{dt}$$

и полином по α степени k

$q_k(\alpha) = \prod_{m=0}^{k-1}(\alpha - m), m \in N.$

$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{n-k} y^{(n-k)}(x) = f(x), a_k = const \in \mathbb{R}.$ (5.2)

Лемма 5.1. Если $t = \ln x$ (соответственно $x = e^t$), то $D^k = e^{-k}\ q_k(T)$.

○ По индукции:

① $\underline{k=1}$ $Dy = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = e^{-t}Ty = e^{-t}q_1(T)y.$

② Пусть $D^{k-1} = e^{-(k-1)t}q_{k-1}(T)$.

③$D^k = DD^{k-1} = e^{-t}T \cdot D^{k-1} = e^{-t}T\left(e^{-(k-1)t}q_{k-1}(T)\right) =$

$= e^{-t}\left(\left(\frac{d}{dt}e^{-(k-1)t}\right) \cdot q_{k-1}(T) + e^{-(k-1)t}Tq_{k-1}(T)\right) =$

$= e^{-t}\left(\big(-(k-1)\big)e^{-(k-1)t} \cdot q_{k-1}(T) + e^{-(k-1)t}Tq_{k-1}(T)\right) =$

$= e^{-t}e^{-(k-1)t}q_{k-1}(T)\big(T - (k-1)\big) = e^{-kt}q_k(T),$

ч.т.д.

●

Лемма 5.2. Уравнение Эйлера (5.2) заменой $x = e^t$ при $x > 0$сводится к ЛОДУ с ПК.

○ ДУ (5.2) в новых переменных будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{(n-k)t}e^{-(n-k)t}q_{n-k}(T)y(t) = f(e^t)$$

или

$\sum_{k=0}^{n} a_k\, q_{n-k}(T)y(t) = f(e^t).$ (5.3)

При этом характеристическое уравнение имеет вид

$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, q_{n-k}(\lambda) = 0.$ (5.4)

●

Замечание 5.4. Характеристическое уравнение (5.4) можно написать сразу, не проводя замену независимого переменного и не пересчитывая производные.

Действительно, характеристическое уравнение вида (5.4) для ЛОДУсПостК получается, если подставить $y = e^{\lambda t}$ в левую часть (5.3) и сократить на общий множитель $e^{\lambda t}(\neq 0)$, приравняв затем все к 0.

У нас $e^t = x$ и, соответственно, $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$.

Поэтому можно подставить x^{λ} в левую часть (5.2), и сократить затем на x^{λ} ($\neq 0$ при $x > 0$).

Получим
$a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+a_j\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+j+1)+\cdots+$
$+a_{n-1}\lambda+a_n=0,$
т.е. $\sum_{k=0}^{n} a_k\, q_{n-k}(\lambda)=0.$

Замечание 5.5. Если $f(x)=x^{\mu}P_s(ln\,x)$, то можем применять метод неопределенных коэффициентов.