

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2020/2021 учебный год
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{2n^4} + \operatorname{th} \frac{x^3}{n^4}\right)$$

на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

2. ③ Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_8^{16} (16y^2 + 24yy' + y'^2 + 4xy) dx, \quad y(8) = \operatorname{ch} 32 - 1, \quad y(16) = \operatorname{ch} 64 - 2.$$

3. ③ Найти образ прямой $l: 5x + y = 1$ при аффинном преобразовании

$$\begin{cases} x^* = 2x + y + 1 \\ y^* = x + y + 2 \end{cases}$$

4. ④ Найти все действительные решения уравнения $y'' - 8y' + 16y = 6xe^{4x}$.

5. ④ Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 6y \\ \dot{y} = 4x + 7y, \end{cases} \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 1.$$

6. ④ Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + 1, & x \in [-1, 1], \\ 3, & x \in [-\pi, -1) \cup (1, \pi]. \end{cases}$$

Построить график суммы ряда и исследовать ряд Фурье на равномерную сходимость на \mathbb{R} .

7. ④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^{2\alpha})}{x \ln^\alpha(1+x)} dx$.

8. ④ Вычислить

$$\iiint_D z dx dy dz, \quad \text{где } D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \frac{1}{3} \leq xy \leq 1; 2 \leq x^2 yz \leq 4 \right\}.$$

9. ④ Исследовать на экстремум функцию $u(x, y) = x^5 y^5$ при условии $x^{10} + y^{10} = 2, \quad x, y > 0$.

10. ⑤ Найти асимптоты, точки локального экстремума, точки перегиба и построить график функции (ординату точки перегиба можно не вычислять)

$$f(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 2x - 3}{(x - 3)^2}.$$

11. ③ Разложить функцию $f(x) = x^2 \int_0^x \ln\left(3 + \frac{t^2}{2}\right) dt$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости полученного ряда.

12. ③ Найти общее решение системы линейных уравнений; указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + 4z = 4 \\ 3x + 8y + 7z = -3. \end{cases}$$

13. ③ Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2 , если

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad l_2 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Система координат прямоугольная.

14. ④ Вычислить интеграл $\iint_S (2z^6 + 3x) dy dz$, где S – внешняя сторона поверхности $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1; \quad z \geq 0$.

15. ④ Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3} e^{x^2}\right) + 3 \arcsin x^2 \right)^{\frac{1}{3 \sin^2 x}}$.

16. ③ Квадратичная форма $k(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_3^2 - x_1 x_2$ задана в базисе (e_1, e_2, e_3) . Записать ее в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , если $e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3, \quad e_2 = e'_1 + e'_2, \quad e_3 = e'_1 + e'_3$.

17. ② Вычислить $\int (2x^{\frac{2}{3}} + 3)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx$.

18. ④ Вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{(z-i)^2} dz$.