

1. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) n-го порядка.
2. Проверить, является ли решением уравнения $y' y = x$ соответствующая функция а) $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, б) $y(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$, в) $y(x) = \sqrt{x^2 + C}$.
3. Решить дифференциальное уравнение $x(1 - y^2)dx - y(1 - x^2)dy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Прием выделения полных производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $(y'')^2 + xy'' = 2y'$.
3. Решить задачу Коши $xyy'' - yy' + x(y')^2 = 0$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 1$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Постановка задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Выяснить, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $y' = \sqrt[3]{y(y' + 1)}$.
3. Доказать, что задача Коши $y' = xy + 2 + \sin y$, $y(0) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной.
2. Решить уравнение $(y')^2 - 1 = 0$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $y = (x - 1)y' - (y')^2$.



2. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение порядка ОДУ.
2. Решить ДУ $y' = \frac{y-1}{x+1}$.
3. Решить дифференциальное уравнение $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит независимой переменной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y' - 2yy' \ln y = (y')^2$.
3. Решить задачу Коши $xyy'' + yy' - 2x(y')^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Постановка задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде..
2. Сколько существует решений уравнения $y''' = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$?
3. Доказать, что при $\alpha < 0$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно независимого переменного.
2. Решить уравнение $(y')^2 - 4x^2 = 0$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $(y')^2 - 2xy' + 4y - x^2 = 0$.

3. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Привести пример ОДУ 3-го порядка.
2. Решить ДУ $(y - 1)dx - (x + 1)dy = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $2x^2y' = y^3 + xy$ при $x > 0, y > 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $xuy'' + uy' = x(y')^2(1 - x)$.
3. Решить задачу Коши $2e^{2y}y'' + e^{2y}(y')^2 = 3(y')^4, y(0) = 1, y'(0) = e$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Доказать, что при любых начальных условиях решение задачи Коши $\begin{cases} y' = y + e^{-y^2}, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, существует при $-\infty < x < +\infty$.
3. Доказать, что задача Коши $y' = 2xy + 1 + \cos y, y(0) = 1$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Клеро.
2. Решить уравнение $(y')^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $2(y')^2 + 2xy' + 2y + x^2 = 0$.



4. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Записать общий вид ОДУ 4-го порядка, разрешенного относительно производной.
2. Решить ДУ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$ при $x > 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции и ее производной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y$.
3. Решить задачу Коши $y'' - (y')^2 + 2e^{2y}(y')^4 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{e}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Могут ли графики двух решений уравнения $y' = x + y^2$ на плоскости xOy касаться в некоторой точке (x_0, y_0) ?
3. Доказать, что при $\alpha > 1$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Лагранжа.
2. Решить уравнение $(y')^2 + y' = 2$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $(y')^2 + 8xy' - 4y + 8x^2 = 0$.

5. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение решения ОДУ n-го порядка.
2. Решить дифференциальное уравнение $x \frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение однородное относительно искомой функции и ее производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y''' + 2xy'' = 0$.
3. Решить задачу Коши $(x^2 - 2x)yy'' + (3x - 4)yy' - x(x^2 - 3x + 2)(y')^2 = 0$, $y(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y'(3) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка существования решения.
2. Может ли уравнение $y' = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?
3. Доказать, что задача Коши $y' = x^2y + 2 + e^{-y^2}$, $y(1) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно неизвестной функции.
2. Решить уравнение $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $(y')^2 - 4xy' - 4y + 8x^2 = 0$.



6. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение общего решения ОДУ n-го порядка.
2. Уравнение Риккати $\frac{dy}{dx} + 2y + e^x = 2 + e^x y^2$ свести к уравнению Бернулли.
3. Решить дифференциальное уравнение $2x^2 y' = y^3 + xy$ при $x < 0$, $y < 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение обобщенно однородное.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $2(y + 2)y'' + (2y - 1)(y')^4 = (y')^2$.
3. Решить задачу Коши $2(y + 2)y'' + (2y - 1)(y')^4 = (y')^2$, $y(5) = 7$, $y'(5) = \frac{1}{2}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка единственности решения.
2. Может ли уравнение $y' = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?
3. Доказать, что решение уравнения $y' = x^3 - y^3$ с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ может быть продолжено на промежуток $[x_0, +\infty)$ при любом x_0 .

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной.
2. Решить уравнение $(y')^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $y = xy' - e^{y'}$.

7. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение интеграла ОДУ n-го порядка.
2. Найти интегрирующий множитель уравнения $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x y^2$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Прием выделения полных производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $(x^2 - 2x)yy'' + (3x - 4)yy' - x(x^2 - 3x + 2)(y')^2 = 0$.
3. Решить задачу Коши $(x^3 + 3x)yy'' - 3(x^2 + 1)yy' - (x^3 + x)(y')^2 = 0$, $y(1) = \sqrt{e}$, $y'(1) = 4\sqrt{e}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка единственности решения.
2. Могут ли графики двух решений уравнения $y''' = x + y^2$ на плоскости xOy касаться в некоторой точке (x_0, y_0) ?
3. Доказать, что задача Коши $y' = xy + 2 + \sin y$, $y(0) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно независимого переменного.
2. Решить уравнение $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $y = xy' - (y')^5$.



8. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение общего интеграла ОДУ n-го порядка.
2. Доказать, что функция, заданная неявно равенством $y^2 + x^2 - 2Cx = 0$, является решением ДУ $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит независимой переменной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $yy'' = y'(y' + 1)$.
3. Решить задачу Коши $2(y^2 + y)y'' + (y')^2 + (y^2 - 8)(y')^4 = 0$, $y(10) = 1$, $y'(10) = \frac{1}{3}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка единственности решения.
2. Выяснить, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $(x^2 y')' = \sqrt[3]{y}$.
3. Доказать, что при $\alpha < 0$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Клеро.
2. Решить уравнение $(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $y = \frac{xy'}{4} + 4\frac{x^3}{y}$.

9. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Что такое интегральная кривая?
2. Решить Задачу Коши $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y' + 2y' = e^x(y')$.
3. Решите при $x > 0$ задачу Коши $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Обыкновенная точка.
2. Сколько существует решений уравнения $y'' = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$?
3. Доказать, что задача Коши $y' = 2xy + 1 + \cos y$, $y(0) = 1$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Лагранжа.
2. Решить уравнение $(y')^2 - 1 = 0$.
3. Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые $y = \frac{xy'}{2} - \ln \frac{y'}{2x}$.



10. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Поставить Задачу Коши для ОДУ 3-го порядка, разрешенного относительно производной.
2. Решить ДУ $(y + 1)dx - (x - 1)dy = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $2x^2y' = y^3 + xy$ при $x > 0$, $y < 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции и ее производной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $2(y^2 + y)y'' + (y')^2 + (y^2 - 8)(y')^4 = 0$.
3. Решите при $x > 0$ задачу Коши $x^2yy'' = (y - xy')^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. p -дискриминантное множество.
2. Доказать, что решение задачи Коши
$$\begin{cases} y'' = y^2 \cos x + y' \sin x + 1, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$
 существует и единственно. Для этого решения вычислить $y'''(0)$.
3. Доказать, что при $\alpha > 1$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно неизвестной функции.
2. Решить уравнение $(y')^2 - 4x^2 = 0$.
3. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $2y(y' + 2) - x(y')^2 = 0$.

11. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Сформулировать теорему о существовании и единственности решения Задачи Коши.
2. Решить ДУ $y' = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$ при $x > 0, y > 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right] dy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение однородное относительно искомой функции и ее производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $(x^3 + 3)yy'' - 3(x^2 + 1)yy' - (x^3 + x)(y')^2 = 0$.
3. Решите при $x \geq -\frac{1}{2}$ задачу Коши $2yy'' + y^2(y')^4 + (y')^2 = 0, y(0) = -1, y'(0) = -1$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Связь особого решения и р-дискриминантной кривой.
2. Может ли уравнение $y^{(5)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^2 + x^4$?
3. Доказать, что задача Коши $y' = x^2y + 2 + e^{-y^2}, y(1) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной.
2. Решить уравнение $(y')^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.
3. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $x(y')^2 = yy' + 1$.



12. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 5-го порядка.
2. Решить дифференциальное уравнение $x \frac{dy}{dx} - 3y = -x^2$.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение обобщенно однородное.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.
3. Решите при $x > 0$ задачу Коши $x^2yy'' = (y + xy')^2, y(1) = 3, y'(1) = -1$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Постановка задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Может ли уравнение $y^V = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?
3. Доказать, что решение уравнения $y' = x^3 - y^3$ с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ может быть продолжено на промежутке $[x_0, +\infty)$ при любом x_0 .

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно независимого переменного.
2. Решить уравнение $(y')^2 + y' = 2$.
3. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $(y')^2 - yy' + e^x = 0$.

13. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Привести пример ОДУ 2-го порядка.
2. Уравнение Риккати $\frac{dy}{dx} + 4x^2y^2 + 2xy = 6 - \frac{1}{x^2}$ свести к уравнению Бернулли.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 + y^4} + y^2$ при $x > 0, y > 0$

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Прием выделения полных производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $x^2y'' = (y')^2$.
3. Проинтегрировать уравнение $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Постановка задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Может ли уравнение $y' = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?
3. Доказать, что задача Коши $y' = xy + 2 + \sin y, y(0) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Клеро.
2. Решить уравнение $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$.
3. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.



14. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Записать общий вид ОДУ 2-го порядка, разрешенного относительно производной.
2. Найти интегрирующий множитель уравнения $\left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} + 4x^3y^3 + 2xy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит независимой переменной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.
3. Проинтегрировать уравнение $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Могут ли графики двух решений уравнения $y'' = x + y^2$ на плоскости xOy касаться в некоторой точке (x_0, y_0) ?
3. Доказать, что при $\alpha < 0$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Лагранжа.
2. Решить уравнение $(y')^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0$.
3. Решить уравнение $3(y')^4 + 4[(y')^3 + y + x] = 0$.

15. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение решения ОДУ 1-го порядка.
2. Доказать, что неэлементарная функция $y(x) = x \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$, заданная в виде "неберущегося" интеграла, является решением ДУ $xy' = y + x \sin x$.
3. Решить дифференциальное уравнение $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $x^2 y'' = (y - xy')^2$.
3. Проинтегрировать уравнение $yy'' - (y')^2 = y'$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Выяснить, при каких начальных условиях существует единственное решение системы
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^3 + \ln(1 + t), \\ x \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{y - t}. \end{cases}$$
3. Доказать, что задача Коши $y' = 2xy + 1 + \cos y$, $y(0) = 1$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно неизвестной функции.
2. Решить уравнение $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$.
3. Решить уравнение $2y' - 2 \ln y' + y - x = 0$.



16. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение общего решения ОДУ 1-го порядка.
2. Решить Задачу Коши $y' = \frac{y}{x}$, $y(0) = 1$.
3. Решить дифференциальное уравнение $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции и ее производной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y'y''' = 2(y'')^2$.
3. Найти решение задачи Коши $xy'' - y' - x^2 y y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка существования решения.
2. Сколько существует решений уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$?
3. Доказать, что при $\alpha > 1$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной.
2. Решить уравнение $(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2 y = 0$.
3. Решить уравнение $5(y')^6 = 6[(y')^5 + y - x]$.

17. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение интеграла ОДУ 1-го порядка.
2. Найти решение ДУ $ydx - xdy = 0$, проходящее через точку $(0,1)$.
3. Решить дифференциальное уравнение $2x^2y' = y^3 + xy$ при $x < 0, y > 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение однородное относительно искомой функции и ее производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y'' + 2xy' = 0$.
3. Решить уравнение $x^2y'' = (y')^2$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка единственности решения.
2. Доказать, что решение задачи Коши
$$\begin{cases} y'' = y^2 \cos x + y' \sin 2x + 5, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$
 существует и единственно. Для этого решения вычислить $y'''(0)$.
3. Доказать, что задача Коши $y' = x^2y + 2 + e^{-y^2}, y(1) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно независимого переменного.
2. Решить уравнение $(y')^2 - 1 = 0$.
3. Решить уравнение $y'(y - x - \ln y') = 1$.



18. ДУ 2курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Дать определение общего интеграла ОДУ 1-го порядка.
2. Решить ДУ $xy' = y + x(1 + e^{\frac{y}{x}})$ при $x > 0, y > 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $(x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x) \frac{dy}{dx} + y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение обобщенно однородное.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $2yy'' + y^2(y')^4 + (y')^2 = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $xuy'' - x(y')^2 = yy'$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка единственности решения.
2. Могут ли графики двух решений уравнения $y''' = x + y^2$ на плоскости xOy касаться в некоторой точке (x_0, y_0) ?
3. Доказать, что решение уравнения $y' = x^3 - y^3$ с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ может быть продолжено на промежуток $[x_0, +\infty)$ при любом x_0 .

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Клеро.
2. Решить уравнение $(y')^2 - 4x^2 = 0$.
3. Найдите все решения уравнения $4y' - 2 \ln 2 y' = x - 2y$.

19. ДУ 2 курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Что такое поле направлений?
2. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} \sin 2x = 2(y + \cos x)$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Прием выделения полных производных.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $x^2yy' = (y + xy')^2$.
3. Решить дифференциальное уравнение $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Точка единственности реш.
2. Может ли уравнение $y'' = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?
3. Доказать, что задача Коши $y' = xy + 2 + \sin y, y(0) = 0$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнение Лагранжа.
2. Решить уравнение $(y')^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.
3. Найдите все решения уравнения $(y')^2 - 4y' = 8x - 4y$.



20. ДУ 2 курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Поставить Задачу Коши для ОДУ 2-го порядка, разрешенного относительно производной..
2. Уравнение Риккати $x \frac{dy}{dx} + xy^2 = y + x^3$ свести к уравнению Бернулли.
3. Решить дифференциальное уравнение $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 + y^4} + y^2$ при $x > 0, y < 0$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит независимой переменной.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$.
3. Решить задачу Коши $(x^2 - 2x)yy'' + (3x - 4)yy' - x(x^2 - 3x + 2)(y')^2 = 0, y(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}, y'(3) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. Связь особого решения и р-дискриминантной кривой.
2. Могут ли графики двух решений уравнения $y'' = x + y^2$ на плоскости xOy пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0) ?
3. Доказать, что при $\alpha < 0$ каждое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Метод введения параметра для уравнения (неразрешенного относительно производной) разрешенного относительно неизвестной функции.
2. Решить уравнение $(y')^2 + y' = 2$.
3. Найдите все решения уравнения $y' - \ln y' = y - x + 1$.

21. ДУ 2 курс 3 семестр 1 задание

1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

1. Сформулировать теорему о существовании и единственности решения Задачи Коши.
2. Найти интегрирующий множитель уравнения $(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y dx - x dy = 0$.
3. Решить дифференциальное уравнение $x \frac{dy}{dx} + xy^2 = y$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Замена, приводящая к понижению порядка, если уравнение не содержит искомой функции.
2. Понизить порядок дифференциального уравнения $y'' + 2y' = e^x (y')^2$.
3. Решить задачу Коши $2(y+2)y'' + (2y-1)(y')^4 = (y')^2, y(5) = 7, y'(5) = \frac{1}{2}$.

3. Задача Коши для уравнений в нормальной форме.

1. p -дискриминантное множество.
2. Могут ли графики двух решений уравнения $y' = x + y^2$ на плоскости xOy касаться в некоторой точке (x_0, y_0) ?
3. Доказать, что задача Коши $y' = 2xy + 1 + \cos y, y(0) = 1$, имеет решение, определенное при $-\infty < x < \infty$.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной.
2. Решить уравнение $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$.
3. Найдите все решения уравнения $(y')^2 - 2y' = 4y - 4x - 2$.