

1. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые: $3(y')^4 + 4[(y')^3 + y + x] = 0$.
3. Проверить, что функция $f(x, y) = y^2 \sin x + e^x$ в полосе $\Pi = \{(x, y): |y| \leq 2\}$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно относительно $x \in R$. Найти наименьшую из постоянных Липшица.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений $x, x^2 - 1$.
3. Найти все решения уравнения $x^2(x + 2)^2 y'' - x(x^2 - 4)y' + x(x - 2)y = 5(x + 2)^3 \ln^3 x$.

3. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены независимого переменного.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $y'' + \frac{a}{x^2}y = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Теорема об устойчивости по линейному приближению.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - xy, \\ \dot{y} = \ln(1 + 4x - 3y - xy). \end{cases}$$



2. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые: $2y' - 2 \ln y' + y - x = 0$.
3. Пусть $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в $G \subset R^2$, $(x_0, y_0) \in G$. Доказать, что метод последовательных приближений Пикара $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi)) d\xi$ дает решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x, \ln x$.
3. Найти все решения уравнения $x^2 y'' - x(8x - 1)y' + 4x(4x - 1)y = (4 - x)e^{4x}$, $x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены искомой функции.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 2y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $5(x + 1)^2 y'' + y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Центр.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - xy, \\ \dot{y} = \ln(1 + 4x - 3y - xy). \end{cases}$$

3. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые: $5(y')^6 = 6[(y)^5 + y - x]$.
3. Метод последовательных приближений Пикара $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi)) d\xi$ найти третье приближение решения задачи Коши $y' = x + y$, $y(0) = 1$. Сравнить с точным решением.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений.
2. Найти определитель Вронского системы функций e^x , xe^x , x^2e^x ; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найти все решения уравнения $x(x-1)^2y'' - (x^2-1)y' + (x+1)y = \frac{(x-1)^3}{x \ln^2 x}$, $x > 1$.

3. Теорема Штурма

1. Инвариант линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 3$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{3}{(x^2+1)}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Фокус: устойчивый, неустойчивый.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 5y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{8x + 2y - 7} - 1, \\ \dot{y} = x^2 - 4x - y. \end{cases}$$



4. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые:
 $y'(y - x - \ln y) = 1$.
3. На каком промежутке теорема существования и единственности гарантирует существование и единственность решения задачи Коши $y' = x - y^2$, $y(0) = 1$, если уравнение рассматриваем в квадрате $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная матрица линейной однородной системы уравнений.
2. Решить уравнение $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0$, зная его частное решение $y(x) = x$.
3. Найти все решения уравнения $x^2(x+1)y'' - x(3x+4)y' + 2(2x+3)y = \frac{2x^4 \ln(x+1)}{x+1}$, $x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Лемма о линейной зависимости нетривиальных решений линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 4y = 0$.
3. Доказать, что каждое решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на $(0, \infty)$.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Седло.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем: $\begin{cases} \dot{x} = sh(3y - 3y^2), \\ \dot{y} = 3xy - 2x + 4y - 4. \end{cases}$

5. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для n-го порядка в нормальном виде.
2. Найдите все решения уравнения $4y' - 2 \ln 2 y' = x - 2y$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Найдите все решения задачи Коши $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, определенные на промежутке $[0, \infty)$. Как полученный результат согласуется с теоремой существования и единственности задачи Коши?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

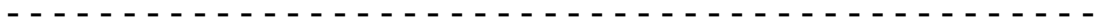
1. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$.
3. Найдите все действительные решения уравнения $x^2(\operatorname{sh} x)y'' - x(2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x)y' + (2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x)y = x^4 \operatorname{sh}^2 x$, $x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Лемма о кратности нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 5y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Найдите расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ при $x \rightarrow \infty$.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Узел: устойчивый, неустойчивый.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -3y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg} 2y, \\ \dot{y} = e^x - 1. \end{cases}$$



6. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Найдите все решения уравнения $(y')^2 - 4y' = 8x - 4y$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.

3. Доказать, что решение задачи Коши
$$\begin{cases} y'' = y^2 \sin x + y' \cos 2x + x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$
 существует и единственно. Для этого решения вычислить $y'''(0)$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейной однородной системы уравнений.
2. Найти определитель Вронского системы функций $10, \arcsin x, \arccos x; I = (-1, 1)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найдите все действительные решения уравнения $(\cos x)y'' + (\sin x - \cos x)y' - (\sin x)y = 2e^x \cos^2 x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Теорема Штурма

1. Лемма о количестве нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка на замкнутом промежутке.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0; q(x) > 0; x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 6$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Доказать, что при $b(x) \neq 0$ нули функции $y(x)$ (если они существуют) и нули ее производной строго перемежаются.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Классификация положений равновесия.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -3y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - 1, \\ \dot{y} = -\arcsin(2x + 3y). \end{cases}$$

7. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Принцип сжимающих отображений.
2. Найдите все решения уравнения $y' - \ln y' = y - x + 1$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Может ли уравнение Риккати $y' = y^2 + xy + x^3$ иметь особое решение?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений x, e^{-2x} .
3. Найдите все действительные решения уравнения $x^2(ch x)y'' - x(2ch x + x sh x)y' + (2ch x + x sh x)y = x^4 ch^2 x, x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Определение колеблющегося решения.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 7y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $x^2y'' + ay = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Понятие устойчивости.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = -\arctg 4y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x). \end{cases}$$



8. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Продолжение, сужение, стыковка решений.
2. Найдите все решения уравнения $(y')^2 - 2y' = 4y - 4x - 2$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Может ли уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x^3 + x$?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейной неоднородной системы уравнений.
2. Показать, что если $\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)} \equiv const$ на $I = (a, b)$, то функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ линейно зависимы на I .
3. Найдите все действительные решения уравнения $(\sin x)y'' + (\sin x - \cos x)y' - (\cos x)y = 2e^{-x} \sin^2 x$, $x \in (0; \pi)$.

3. Теорема Штурма

1. Определение неколеблющегося решения.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 8y = 0$ может содержаться на отрезке $[-2, 1]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $5y'' + \frac{1}{(x+1)^2}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

1. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Характеристическая система АСДУ.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = -sh 2 y, \\ \dot{y} = e^{x+3y} - 1. \end{cases}$$

9. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Непродолжаемое решение.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(6x + 6y)^5 = y'(y' + 6)^5$.
3. Может ли уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x^3 + x$?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

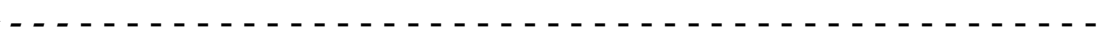
1. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Найти определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x$; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Решить уравнение: $(x + 1)y'' - 3(2x + 1)y' + 9xy = 2e^{4x}$.

3. Теорема Штурма

1. Теорема Штурма.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 9$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $\frac{1}{3}y'' + \frac{1}{(x^2+1)}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Теорема о фазовых траекториях.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = x \operatorname{arctg}(1 - y^2), \\ \dot{y} = \ln \frac{y}{x}. \end{cases}$$



10. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема о продолжении решения в замкнутой ограниченной области.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $y'(y' + 4)^3 + (4x + 4y)^3 = 0$.
3. Доказать, что решение задачи Коши
$$\begin{cases} y'' = y^2 \cos x + y' \sin x + 1, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$
 существует и единственно. Для этого решения вычислить $y'''(0)$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Определитель Вронского для линейной системы уравнений.
2. Решить уравнение $y'' + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4}{2x+1}y = 0$, зная его частное решение $y(x) = x$.
3. Решить уравнение $xy'' - (x + 3)y' + \left(1 + \frac{3}{x}\right)y = \frac{x^3 e^x}{x-1}$ ($x > 1$).

3. Теорема Штурма

1. Теорема сравнения.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 10y = 0$.
3. Доказать, что каждое решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на $(0, \infty)$.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Главный период.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - x^2, \\ \dot{y} = \arcsin(x - x^3). \end{cases}$$

11. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема о продолжении решения на весь заданный интервал.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(2y - 2x)^5 + y'(y' - 6)^5 = 0$.
3. Доказать, что функция $f(x, y) = (2 + \cos x)y^{2/3} - \sin x$ в полосе $\Pi = \{(x, y): |y| \leq 2\}$ не удовлетворяет условию Липшица по y равномерно относительно $x \in R$. Найти наименьшую из постоянных Липшица.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Определитель Вронского для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $\ln x^4$, $\ln 5x$, 11 .
3. Решить уравнение $(x + 3)y'' + 2(2x + 7)y' + 4(x + 4)y = xe^{-3x}$.

3. Теорема Штурма

1. Следствие теоремы сравнения.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 11y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Найти расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$ при $x \rightarrow \infty$.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Периодические решения.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(x + y), \\ \dot{y} = \sqrt{2x^2 + 2y - 5} - 1. \end{cases}$$

✂

12. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Лемма Гронуолла.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $y'(y' - 4)^3 = (y - x)^3$.
3. Пусть $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в $G \subset R^2$, $(x_0, y_0) \in G$. Можно ли методом последовательных приближений Пикара $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi))d\xi$ найти решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Метод Лагранжа вариации постоянных.
2. Найти определитель Вронского системы функций $x^2, x|x|$; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Решить уравнение $(x^3 + 2x^2)y'' + 2xy' - 2y = \frac{(x+2)^2}{x}$ ($x > 0$).

3. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены независимого переменного.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 12$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение уравнения $y'' + a(x)y' + y = 0$. Доказать, что нули функции $y(x)$ (если они существуют) и нули ее производной строго перемежаются.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Свойства фазовых траекторий.
2. Найдите положения равновесия системы, определите их характер и начертите фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определите их характер и начертите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \ln(2y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - y - 2y^2. \end{cases}$$

13. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Точка существования решения.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(y')^2 - y + \frac{4}{x}y' = 2 \ln x - \frac{4}{x^2}$.
3. Метод последовательных приближений Пикара $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi))d\xi$ найти третье приближение решения задачи Коши $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Сравнить с точным решением.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Формула Лиувилля-Остроградского для линейной системы уравнений.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений x , $x^2 - 1$.
3. Решить уравнение $(3x - 4)y'' + (17 - 15x)y' + (12x - 4)y = \frac{(3x-4)^2}{x-1}e^x$, $x > \frac{4}{3}$.

3. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены искомой функции.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 13y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $y'' + \frac{a}{x^2}y = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Положение равновесия.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории: $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем: $\begin{cases} \dot{x} = \arctg(y - x + 1), \\ \dot{y} = sh(x - y - x^2). \end{cases}$



14. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Точка единственности решения.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $4y - 4y' + (y')^2 + 12 = 8x$.
3. На каком промежутке теорема существования и единственности гарантирует существование и единственность решения задачи Коши $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$, если уравнение рассматриваем в квадрате $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Формула Лиувилля-Остроградского для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции x , $\ln x$.
3. Решить уравнение $x(x^2 + 1)y'' - (x^2 + 5)y' + \frac{8}{x}y = \frac{2x^4}{x^2+1}$, $x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Инвариант линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 14y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 0]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $(x + 1)^2 y'' + \frac{1}{5}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Фазовые траектории, имеющие общую точку.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y-1} - 1, \\ \dot{y} = \ln(x^2 + y). \end{cases}$$

15. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Точка единственности решения.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(y')^2 - y + 2e^{-x}y' + e^{-2x} + e^{-x} = 0$.
3. Найти все решения задачи Коши $y' = \frac{3}{2}y^{1/3}$, $y(0) = 0$, определенные на промежутке $[0, \infty)$. Как полученный результат согласуется с теоремой существования и единственности задачи Коши?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений.
2. Найти определитель Вронского системы функций e^x , xe^x , x^2e^x ; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Решить уравнение $(2x + 3)y'' + (8x + 10)y' + (6x + 3)y = \frac{(2x+3)^2}{x+1}e^{-x}$, $x > -1$.

3. Теорема Штурма

1. Лемма о линейной зависимости нетривиальных решений линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 15$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $(x^2 + 1)y'' + 3y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Сдвиг по фазовой траектории.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = \arctg(2 + y - y^2), \\ \dot{y} = 1 - e^{y^2 - x}. \end{cases}$$



16. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Особое решение.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $5x^3y' - 10x^2y + (y')^2 = 0$.
3. Может ли уравнение Риккати $y' = y^2 + y + \sin x$ иметь особое решение?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Решить уравнение $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0$, зная его частное решение $y(x) = x$.
3. Решить уравнение $x(1 - x^2)y'' + (2x^2 - 5)y' + \left(\frac{8}{x} - 2x\right)y = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$.

3. Теорема Штурма

1. Лемма о кратности нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 16y = 0$.
3. Доказать, что каждое решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на $(0, \infty)$

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Фазовая траектория.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(xy), \\ \dot{y} = e^{x+2y-3} - 1. \end{cases}$$

17. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Обыкновенная точка.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $3(y')^2 - 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$.
3. Доказать, что решение задачи Коши $\begin{cases} y'' = y^2 \cos x + y' \sin 2x + 5, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ существует и единственно. Для этого решения вычислить $y'''(0)$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$.
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2 y'' + (4x + 2x^2)y' + 2(1 + 2x)y = 2e^{-2x}$, $x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Лемма о количестве нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка на замкнутом промежутке.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 17y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 2]$?
3. Найти расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ при $x \rightarrow \infty$.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Фазовое пространство.
2. Найдите положения равновесия системы, определите их характер и начертите фазовые траектории: $\begin{cases} \dot{x} = -2y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$
3. Найдите положения равновесия системы, определите их характер и начертите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем: $\begin{cases} \dot{x} = 4x - x^2 + y, \\ \dot{y} = \ln(1 + 2x + x^2 + 5y). \end{cases}$



18. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. p -дискриминантное множество.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $(y')^2 + 8xy' - 16x^2 - 16y = 0$.
3. Проверить, что функция $f(x, y) = (2 + \cos x)y^2 + \cos^2 x$ в полосе $\Pi = \{(x, y): |y| \leq 1\}$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Найти наименьшую из постоянных Липшица.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Найти определитель Вронского системы функций $10, \arcsin x, \arccos x; I = (-1, 1)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2 y'' + (3x^2 - 2x)y' + (2 - 3x)y = -3x^3 e^{-3x}, x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Определение колеблющегося решения.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0; q(x) > 0; x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 18$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$. Доказать, что нули функции $y(x)$ и нули ее производной строго перемежаются.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Фазовые переменные.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -2y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = th(2x - y - xy), \\ \dot{y} = 5x - 4y - xy. \end{cases}$$

19. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Связь особого решения и р-дискриминантной кривой.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $(y')^2 + 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$.
3. Может ли уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная матрица линейной однородной системы уравнений.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений x, e^{-2x} .
3. Найти все действительные решения уравнения $xy'' + (2 - 2x)y' + (-2 + x)y = -4e^x$.

3. Теорема Штурма

1. Определение неколеблущегося решения.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 19y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $x^2y'' + ay = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Консервативная система ОДУ.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = -2x - 2y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = sh(5x + x^2 - 3y), \\ \dot{y} = 3x + x^2 - y. \end{cases}$$



20. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $3(y')^2 + 8xy' + 16x^2 + 16y = 0$.
3. Может ли уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на всей плоскости xOy) иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^4$?

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейной однородной системы уравнений.
2. Показать, что если $\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)} \equiv const$ на $I = (a, b)$, то функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ линейно зависимы на I .
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2y'' - (x^2 + 4x)y' + 2(x + 3)y = 12x^4e^{-2x}$, $x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Теорема сравнения.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 20y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{1}{5(x+1)^2}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Динамическая система ОДУ.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = -3y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$$

21. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $27(y')^3 \cdot x^2 + 3xy' - y = 0$.
3. Проверить, что функция $f(x, y) = ye^{-x^2} + \cos x$ в полосе $\Pi = \{(x, y): |y| \leq 1\}$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Найти наименьшую из постоянных Липшица.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Найти определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x; I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2 y'' + (4x + x^2)y' + 2(1 + x)y = e^x, x > 0$.

3. Теорема Штурма

1. Следствие теоремы сравнения.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0; q(x) > 0; x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 21$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $\frac{(x^2+1)}{3}y'' + y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.

4. Исследование поведения фазовых траекторий

1. Автономная система ОДУ.
2. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории:
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = -8x - y. \end{cases}$$
3. Найдите положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \frac{2}{y^2} + 1, \\ \dot{y} = sh(x - y). \end{cases}$$