

1. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Первый интеграл.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = (2x - y). \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = zx, \\ \dot{y} = z(2x - y), \\ \dot{z} = x^2 + z^2 - xy. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. ДУ в ЧП первого порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $xy \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $x \frac{\partial u}{\partial x} + [x(y - 5z)^2 + z] \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{5} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = xz^5$ при $y = 5z + 1$ ($x > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Функционал.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^\pi [e^{2x}y^2 + e^{2x}yy' + 2(y')^2 - 4y' \cos x] dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:
 $J(y) = \int_{7\pi/4}^{11\pi/6} (y')^2 \operatorname{tg} x dx$, $y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\ln 2$, $y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -2 \ln 2$.



2. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Критерий первого интеграла.
2. Могут ли функции $U_1 = x^2 - xy$ и $U_2 = \frac{z^2 + x^2 - xy}{x^2}$ быть первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = (y^2 + 1)z, \\ \dot{y} = (x^2 - 1)z, \\ \dot{z} = (x^2 - 1)y. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Линейное ДУ в ЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (2xy - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши: $(2xy^2 - 7xz^3) \frac{\partial u}{\partial x} + yz^3 \frac{\partial u}{\partial y} - 2y^2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = xy^6$ при $z = 1$ ($y > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Непрерывный функционал.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^{\pi/2} [y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + (y')^2 + 2y' \sin x] dx$, $y(0) = 1$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_{4\pi/3}^{3\pi/2} (y')^2 \sin x dx$, $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ln 3$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

3. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Производная в силу системы.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - z^2), \\ \dot{y} = -y(x^2 + z^2), \\ \dot{z} = z(x^2 + y^2). \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Решение ДУвЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + [x^2 + 2(x - y)z] \frac{\partial u}{\partial y} + (z^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x + y$ при $z = 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Линейный функционал.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^2 [4e^{2x}y + 6e^{2x}y' - 4y^2 - (y')^2] dx$, $y(2) = 3e^4$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_{2\pi/3}^{5\pi/6} (y')^2 \operatorname{ctg} x dx$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln 3$.

✂

4. ДУ 2курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Производная по направлению векторного поля.
2. Могут ли функции $U_1 = x^2 - xy$ и $U_2 = \frac{x}{y}$ быть первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = y^2 - x^2 - z^2, \\ \dot{z} = 2yz. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Интегральная поверхность ДУВЧП.
2. Найдите общее решение уравнения $(x^2y + 2x)\frac{\partial u}{\partial x} + (2xy^2 + y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $2y^2\frac{\partial u}{\partial x} + ye^{-x}\frac{\partial u}{\partial y} - z(e^{-x} + 4y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $y^2e^x = 1$ ($y > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Первая вариация функционала.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^4 \left[5y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}y^2 - \sqrt{x}(y')^2 \right] dx$, $y(1) = 2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_{11\pi/6}^{2\pi} (y')^2 \cos x dx$, $y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\ln 3}{2}$, $y(2\pi) = 0$.

5. ДУ 2курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Производная Ли.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 3xy^2, \\ \dot{y} = 2y^3, \\ \dot{z} = 2y^2z. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Характеристическая система.
2. Найдите общее решение уравнения $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $(2x + x^2y) \frac{\partial u}{\partial x} + (3y + 4xy^2) \frac{\partial u}{\partial y} + (2z + xyz) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = (1 + x^2)z$ при $x = y$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Локальный экстремум функционала.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 - 8e^x y - 8xe^x y'] dx$, $y(1) = e$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^\pi [e^{2x} y^2 + e^{2x} y y' + 2(y')^2 - 4y' \cos x] dx$, $y(0) = 0$.



6. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Теорема о выпрямлении траекторий.
2. Могут ли функции $U_1 = \frac{x-y}{xy}$ и $U_2 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ быть первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = yz, \\ \dot{y} = xz, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Характеристики.
2. Найдите общее решение уравнения $(x^3y^2 + x)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - 3x^2y^3)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $(2x + x^2z)\frac{\partial u}{\partial x} + (2y + xyz)\frac{\partial u}{\partial y} + (3z + 4xz^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = (1 + z^2)y$ при $x = z$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Понятие слабого и сильного экстремума для функционала.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^{e^2} \left(x(y')^2 + \frac{1}{x}y^2 - 2y' - 2\frac{\ln x}{x}y \right) dx$, $y(1) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^e [y^2 + 2xyy' - x(y')^2 + 2xy'] dx$, $y(1) = 1, y(e) = e$.

7. ДУ 2курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Функциональная зависимость.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -x^2. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = z(x + y). \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Общий вид решения ЛДУВЧП.
2. Найдите общее решение уравнения $(y^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $(3x + 4x^2y) \frac{\partial u}{\partial x} + (2y + xy^2) \frac{\partial u}{\partial y} + (3z + 4xyz) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \frac{1}{yz}$ при $x = y^4$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Необходимое условие экстремума.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^2 (2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y) dx, y(1) = 2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + (y')^2 + 2y' \sin x] dx, y(0) = 1$.



8. ДУ 2курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Утверждение о градиентах зависимых решений АСДУ.
2. Могут ли функции $U_1 = \frac{x^2 - xy}{xy - y^2}$ и $U_2 = \frac{x}{y}$ быть первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -x^2, \\ \dot{z} = (x^2 - y - z). \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. АСДУ в симметричной форме.
2. Найдите общее решение уравнения $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $(2x + 3x^2z) \frac{\partial u}{\partial x} + (2y + xyz) \frac{\partial u}{\partial y} + (2z + xz^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x = z$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Основная лемма вариационного исчисления.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^2 (3x^4(y')^2 - 34x^3yu' + 3x^2y^2 - 84x^3y) dx$, $y(2) = 10$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^e [2xy^2 + 2x^2yu' - x(y')^2 - y' + 2y] dx$, $y(1) = -1$, $y(e) = e$.

9. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Как замена переменных меняет систему зависимых функций?
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2, \\ \dot{y} = 2y^2. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2z, \\ \dot{y} = 2y^2z, \\ \dot{z} = -(x + y). \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Задача Коши для ДУвЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $-y \frac{\partial u}{\partial x} + 4x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $-y \frac{\partial u}{\partial x} + 4x \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{4x^2 - y^2}{xy} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$,
 $u = \frac{z}{x^4}$ при $x = y$ ($x > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Допустимая функция.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^4 \left(\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) y^2 + 2yy' \ln x - 4(y')^2 - 10y \right) dx, y(4) = -1$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx, y(1) = 2, y(4) = -5$.



10. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Что происходит с первыми интегралами АСДУ при замене переменных?
2. Могут ли функции $U_1 = \frac{x-y}{y}$ и $U_2 = \frac{x}{y}$ быть первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3z^2, \\ \dot{y} = y^2 e^x, \\ \dot{z} = 2zye^x. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. ДУ в ЧП первого порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $xy \frac{\partial u}{\partial x} + (2x^3y + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши: $\frac{y}{2x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2x^4 - y^2}{4x^3y} z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$,
 $u = \frac{z^2}{x}$ при $y = x^2$ ($x > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Допустимое приращение.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^2 \left(y' \sin y + \frac{(y')^4}{x^3} \right) dx, y(1) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15y'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx, y(1) = 2, y(4) = -5$.

11. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

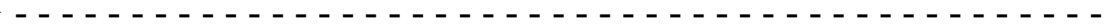
1. Лемма о максимальном количестве независимых первых интегралов АСДУ.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2yx. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y^2, \\ \dot{z} = -z(x + y). \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Линейное ДУ в ЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $\frac{y}{2x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} - z(x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$,
 $u = \frac{z}{x}$ при $x = 3y$ ($x > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Простейшая задача вариационного исчисления.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 4y^2 + 8ye^{2x}) dx$, $y(1) = 2e^2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_{1/4}^1 \left(\frac{11}{x^2} - \frac{25yy'}{x} - 2(y')^2 - \frac{5y}{x^3} \right) dx$, $y\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $y(1) = -1$.



12. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Теорема о числе независимых первых интегралов АСДУ.
2. Могут ли функции $U_1 = x^2 - xy$ и $U_2 = \frac{z^2 + x^2 - x}{x^2}$ быть независимыми первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{2x^2}, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = \frac{2x^4 - y^2}{4x^3y} z. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Решение ДУВЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $2y^3 \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $3z^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 e^x \frac{\partial u}{\partial y} + 2zy e^x \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = e^x y^4$ при $y^2 z = 1$ ($y > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Уравнение Эйлера.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_{-2}^{-1} (2yy' - x^2(y')^2) dx$, $y(-2) = \frac{3}{2}$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - \frac{7y^2}{x^2} - (y')^2 - \frac{12}{x} \right) dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = -1$.

13. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Первый интеграл.

2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$$

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 4x, \\ \dot{z} = z \frac{4x^2 - y^2}{xy}. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Интегральная поверхность ДУВЧП.

2. Найдите общее решение уравнения $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $2x^2 z \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^2 z \frac{\partial u}{\partial y} - (x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = e^{z^2}$ при $x = 2y$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Экстремаль.

2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} [-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y \sin^2 x] dx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.

3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y \sin^2 x] dx$, $y(0) = \frac{4}{5}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.

✂

14. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Критерий первого интеграла.
2. Могут ли функции $U_1 = \frac{x-y}{y}$ и $U_2 = \frac{x}{y}$ быть независимыми первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3x^2z, \\ \dot{y} = 2y + xyz, \\ \dot{z} = 2z + xz^2. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Характеристическая система.
2. Найдите общее решение уравнения $2y \frac{\partial u}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $x \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - y - z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = (2 - z)x$ при $x = y$ ($x > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Допустимая экстремаль.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} (yy' - (y')^2 - y^2 - 4y' \cos^2 x) dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y \sin^2 x] dx$, $y(0) = \frac{4}{5}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.

15. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Производная в силу системы.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{2x^2}, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4x^2y, \\ \dot{y} = 2y + xy^2, \\ \dot{z} = 3z + 4xyz. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Характеристики.
2. Найдите общее решение уравнения $x \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + z(x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 3y^2 z e^{-3y}$ при $x = 2y$ ($x > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Задача со свободными концами.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - 4yy' + y^2 + 4y \cos^2 x) dx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [(y')^2 - yy' + y^2 + 4y \cos^2 x] dx$, $y(0) = -\frac{6}{5}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$.



16. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Производная по направлению векторного поля.
2. Могут ли функции $U_1 = y^2 - z^2$ и $U_2 = y^3 - x^3 + 3(x + y)$ быть независимыми первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + x^2z, \\ \dot{y} = 2y + xyz, \\ \dot{z} = 3z + 4xz^2. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Общий вид решения ЛДУВЧП.
2. Найдите общее решение уравнения $(x^3 + 3x^2y^2) \frac{\partial u}{\partial x} - x^2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши: $yz \frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} + (x - y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = z^2 - 3x^2 - 2x$ при $y = 2x$ ($x > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. ГУ на свободном конце.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - 4yy' + y^2 - 2y' \sin^2 x) dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [(y')^2 - 4yy' + y^2 - 2y' \sin^2 x] dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

17. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Производная Ли.

2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 4x. \end{cases}$$

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + x^2y, \\ \dot{y} = 3y + 4xy^2, \\ \dot{z} = 2z + xyz. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. АСДУ в симметричной форме.

2. Найдите общее решение уравнения $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 2z$ при $x = y$ ($x > 0, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Случай n неизвестных функций.

2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^\pi [e^{2x}y^2 + e^{2x}yy' + 2(y')^2 - 4y' \cos x] dx$, $y(0) = 0$.

3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:

$$J(y) = \int_1^2 \left[\frac{6y}{x} - x^3(y')^2 - xy^2 + 2x^2yy' \right] dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -\frac{7}{4}.$$



18. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Теорема о выпрямлении траекторий.
2. Могут ли функции $U_1 = \frac{y^2}{z}$ и $U_2 = e^x - \frac{z^2}{y}$ быть независимыми первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + x^2y, \\ \dot{y} = 3y + 4xy^2, \\ \dot{z} = 2z + xyz. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Задача Коши для ДУвЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial y} + 2yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = z^2 + z + y^2$ при $z = x^2$ ($x > 0, y > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^{\pi/2} [y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + (y')^2 + 2y' \sin x] dx, y(0) = 1$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_1^2 [2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y] dx, y(1) = 2, y(2) = 5$.

19. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Функциональная зависимость.
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^2, \\ \dot{y} = ye^{-x}. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = x^2 + 2(x - y)z, \\ \dot{z} = (z^2 + 1). \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. ДУ в ЧП первого порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $x \frac{\partial u}{\partial x} + (2x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $x(y^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial x} - y(x^2 + z^2) \frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2(1 + z^2)$ при $y = xz$ ($x > 0, y > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Уравнение Эйлера-Пуассона.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^2 [4e^{2x}y + 6e^{2x}y' - 4y^2 - (y')^2] dx$, $y(2) = 3e^4$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_1^e [x^2(y')^2 - 10yy' + 12y^2 + (24 \ln x - 2)y] dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = -1 + e^3$.



20. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Утверждение о градиентах зависимых решений АСДУ.
2. Могут ли функции $U_1 = \frac{y}{z}$ и $U_2 = 2 \ln y - \ln z^2$ быть независимыми первыми интегралами системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.

3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy^2 - 7xz^3, \\ \dot{y} = yz^3, \\ \dot{z} = -2y^2z. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Линейное ДУ в ЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $xy \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решить задачу Коши: $(y^2 + 1)z \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 - 1)z \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - 1)y \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = z^2$ при $y = x$ ($x > 1, z > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Изопериметрическая задача.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^4 \left[5y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} y^2 - \sqrt{x}(y')^2 \right] dx$, $y(1) = 2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_1^2 \left[2yy' - x^2(y')^2 + 12x^2y \right] dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 0$.

21. ДУ 2 курс 4 семестр 2 задание

1. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

1. Как замена переменных меняет систему зависимых функций?
2. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y^2 + 1. \end{cases}$$
3. Найдите первые интегралы системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x(y - 5z)^2 + z, \\ \dot{z} = \frac{z}{5}. \end{cases}$$

2. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1. Решение ДУвЧП 1-го порядка.
2. Найдите общее решение уравнения $xy \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши: $zx \frac{\partial u}{\partial x} + z(2x - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 + z^2 - xy) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \frac{z^2}{x}$ при $x - y = 1$ ($x > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Условие связи.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 - 8e^x y - 8xe^x y'] dx$, $y(1) = e$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [y^2 - (y')^2 + 6y \sin 2x] dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.