№ C 8.202 Решить при $x>0$ ур-е Эйлера

$$x^2y'' + xy' - 4y = -9\ln x$$

замена $x = e^t$ сводит ЛДУ к ЛДУ с постоянными коэффициентами

$y_{од} = x^\lambda$ $\qquad$ $y_{од} = e^{\lambda t}$

λ = кратной корень

$y_1 = x^\lambda,\ y_2 = x^\lambda \ln x, \ldots$ $\qquad$ $y_1 = e^{\lambda t},\ y_2 = te^{\lambda t}, \ldots$

$$-9\ln x = P_1(\ln x)\cdot x^0$$

$$f(x) = P_m(\ln x)\, x^\mu$$

$$y_r = Q_m(\ln x)\, x^\mu \cdot (\ln x)^s,$$

где s – кратность корня характеристического ур-я, совп. с μ.

№ С 8.202 Решить при $x>0$ ур-е Эйлера

$$x^2y'' + xy' - 4y = -9\ln x$$

$\underline{y = x^\lambda}$

1

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + \lambda x^\lambda - 4x^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} - 4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 2\\ \lambda_2 = -2\end{array}\right.$$

ФСР: $y_1 = x^2$

$y_2 = x^{-2}$

2

$$f(x) = P_1(\ln x)\, x^0$$

$$\lambda = 0 \to s = 0$$

$$y_2 = (b + a\ln x)\, x^0 (\ln x)^0$$

$$y_2' = \frac{a}{x}$$

№ С 8.202 Решить при $x>0$ ур-е Эйлера

$$x^2y'' + xy' - 4y = -9\ln x$$

$$y_2' = \frac{a}{x} \qquad y_2 = b + a\ln x$$

$$y_2'' = -\frac{a}{x^2}$$

$$-a \cancel{+a} - 4b - 4a\ln x = -9\ln x$$

$$b = 0$$

$$a = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{9}{4}\ln x + C_1x^2 + C_2x^{-2}$$

Ф 613 | Построить ЛООДУ с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данное частное решение

$y_1 = x^2 e^x$

- структуре ФСР ЛООДУ
- кратность корней характ. ур-я

Если y_1 - реш $\Rightarrow$ $y_2 = x e^x$

$y_3 = e^x$

$\lambda = 1$ кр. 3

$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Ф 617 | Построить ЛООДУ с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = xe^x, \quad y_2 = e^{-x}$

Если $y_1 = xe^x$ - реш-е $\Rightarrow y = e^x$ - реш-е
$y_2 = e^{-x}$ - реш-е

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ - кратность 2

$\lambda_3 = -1$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda+1) = \underbrace{\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1}_{y'''-y''-y'+y=0}$$

Ф 618 | Построить ЛОДУ с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения:

$$y_1 = x \,, \quad y_2 = \sin x$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \longrightarrow \begin{matrix} \lambda_3 = i \\ \lambda_4 = -i \end{matrix}$$

Хар ур-е: $\lambda^2(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$

$$\lambda^2(\lambda^2 - i^2) = 0$$

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \longrightarrow \boxed{y^{IV} + y'' = 0}$$

1 т.

При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение?

б) Имеет ровно одно периодическое решение?

$\forall a$ решим $y'' + ay = 0$

$y = e^{\lambda x}$ $\quad \lambda^2 + a = 0 \longrightarrow$ 1) $a = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = 0$ ФСР: $y_1 = 1$

$y_2 = x$

2) $a < 0 \longrightarrow a = -b^2$

$\lambda^2 = b^2 \qquad \lambda_{1,2} = \pm b$

ФСР: $y_1 = e^{bx}$

$y_2 = e^{-bx}$

3) $a > 0 \longrightarrow a = c^2$

$\lambda_{1,2} = \pm ic$

ФСР: $y_1 = \cos cx$, $y_2 = \sin cx$

1 т. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение?

б) Имеет ровно одно периодическое решение?

Для каждого из рассмотренных случаев найти частное реш. НЛОДУ

$y = e^{\lambda x}$ $\quad \lambda^2 + a = 0 \longrightarrow$ 1) $a = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = 0$ ФСР: $y_1 = 1$, $y_2 = x$

2) $a < 0 \longrightarrow a = -b^2$

$\lambda^2 = b^2 \quad \lambda_{1,2} = \pm b$

ФСР: $y_1 = e^{bx}$, $y_2 = e^{-bx}$

3) $a > 0 \longrightarrow a = c^2$

$\lambda_{1,2} = \pm ic$

ФСР: $y_1 = \cos cx$, $y_2 = \sin cx$

1) $y_1=1,\ y_2=x,\quad a=0$

$y_r = A\sin x + B\cos x$

$-A\sin x - B\cos x = \sin x \longrightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B=0 \end{matrix}$

$y_2 = -\sin x$

$y = -\sin x + C_1 + C_2 x$

2) $a<0,\ a=-b^2,\quad y_1=e^{bx},\ y_2=e^{-bx}$

$y_r = A\sin x + B\cos x$

$-A\sin x - B\cos x - b^2(A\sin x + B\cos x) = \sin x$

$\begin{cases} -A - b^2 A = 1 & A = -\dfrac{1}{1+b^2} \\ -B - b^2 B = 0 \longrightarrow & B=0 \end{cases}$

$y = -\dfrac{\sin x}{1-a} + C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}$

1) при $a \neq 1$

2) $a \leq 0,\ \sqrt{a} \in \mathbb{Z},\ a>0,\ a\neq 1$

$y'' + ay = \sin x$

3) $a>0,\ a=c^2,\quad y_1=\cos cx,\ y_2=\sin cx$

3.1) $c^2 \neq 1$

$y_2 = A\sin x + B\cos x\ ;\quad B=0$

$A = \dfrac{1}{c^2-1}$

$y = \dfrac{\sin x}{a-1} + C_1\cos cx + C_2 \sin cx$

3.2) $c^2 = 1$

$y_r = (A\sin x + B\cos x)\,x^1$

$y_2' = (A\cos x - B\sin x)\,x + (A\sin x + B\cos x)$

$y_2'' = (-A\sin x - B\cos x)\,x + 2(A\cos x - B\sin x)$

$\cancel{(-A\sin x - B\cos x)\,x} + 2(A\cos x - B\sin x) + \cancel{(A\sin x + B\cos x)\,x} = \sin x$

$A=0,\quad B=-\dfrac{1}{2}\ ;\quad y_2 = -\dfrac{x\cos x}{2}$

$y = -\dfrac{x\cos x}{2} + C_1\cos cx + C_2\sin cx$