Гл. II. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

§5. Уравнение Эйлера.

(продолжение)

$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{n-k} y^{(n-k)}(x) = f(x),\ a_k = const \in \mathbb{R}.$ (5.2)

Лемма 5.1. Если $t = \ln x$ (соответственно $x = e^t$), то $D^k = e^{-kt} q_k(T)$.

○ По индукции:

① $\underline{k=1}$ $Dy = \frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = e^{-t} T y = e^{-t} q_1(T) y.$

② Пусть $D^{k-1} = e^{-(k-1)t} q_{k-1}(T)$.

③$D^k = DD^{k-1} = e^{-t} T \cdot D^{k-1} = e^{-t} T\left(e^{-(k-1)t} q_{k-1}(T)\right) =$

$= e^{-t}\left(\left(\frac{d}{dt} e^{-(k-1)t}\right) \cdot q_{k-1}(T) + e^{-(k-1)t} T q_{k-1}(T)\right) =$

$= e^{-t}\left(\left(-(k-1)\right) e^{-(k-1)t} \cdot q_{k-1}(T) + e^{-(k-1)t} T q_{k-1}(T)\right) =$

$= e^{-t} e^{-(k-1)t} q_{k-1}(T)\left(T - (k-1)\right) = e^{-kt} q_k(T),$

ч.т.д.

●

Лемма 5.2. Уравнение Эйлера (5.2) заменой $x = e^t$ при $x > 0$сводится к ЛОДУ с ПК.

○ ДУ (5.2) в новых переменных будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{(n-k)t} e^{-(n-k)t} q_{n-k}(T) y(t) = f(e^t)$$

или

$\sum_{k=0}^{n} a_k\, q_{n-k}(T) y(t) = f(e^t).$ (5.3)

При этом характеристическое уравнение имеет вид

$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, q_{n-k}(\lambda) = 0.$ (5.4)

●

Замечание 5.4. Характеристическое уравнение (5.4) можно написать сразу, не проводя замену независимого переменного и не пересчитывая производные.

Действительно, характеристическое уравнение вида (5.4) для ЛОДУсПостК получается, если подставить $y = e^{\lambda t}$ в левую часть (5.3) и сократить на общий множитель $e^{\lambda t}(\neq 0)$, приравняв затем все к 0.

У нас $e^t = x$ и, соответственно, $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$.

Поэтому можно подставить x^{λ} в левую часть (5.2), и сократить затем на x^{λ} ($\neq 0$ при $x > 0$).

Получим

$a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+a_j\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+j+1)+\cdots+$
$+a_{n-1}\lambda+a_n=0,$
т.е. $\sum_{k=0}^{n} a_k\, q_{n-k}(\lambda)=0.$

Замечание 5.5. Если $f(x)=x^{\mu}P_s(\ln x)$, то можем применять метод неопределенных коэффициентов.

Гл. III. Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

§1. Общая теория ЛСОДУ.

Изучение линейных ДУ составляет отдельное теоретическое направление благодаря тому, что они обладают рядом свойств, позволяющих глубже их исследовать.

Основное свойство ЛДУ: ВСЕ решения ЛДУ выражаются через КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО действий.

Этим же свойством обладают и линейные системы ДУ.

Определение. Системой ОДУ называется система из k уравнений

$$\begin{cases} F_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}\right)=0, \\ i=\overline{1,k}, \end{cases} \tag{1.1}$$

связывающих

- независимое переменное x,
- k искомых функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ и
- их производные до порядков $m_1, \ldots, m_k$ включительно.

Замечание 1.1. Предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций.
Системы ОДУ, в которых число уравнений меньше числа неизвестных функций, называются уравнениями ***Монжа***.

Рассматриваем в курсе лишь важнейшие случаи, поэтому ограничиваемся случаем, когда система (1.1) может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций:

$$\begin{cases} y_i^{(m_i)}=f_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ i=\overline{1,k}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Определение. Система ОДУ вида (1.2) называется ***канонической***.

Лемма 1.1. Каноническую систему (1.2) из k уравнений высших порядков можно заменить эквивалентной ей системой $n=\sum_{j=1}^{k} m_j$ уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производных всех n искомых функций.

○ Построим новую систему искомых функций, добавив $(n-k)$ зависимых переменных следующим образом:

$y_{10} = y_1$ - переобозначение, новые: $y_{11} = y'_{10} = y'_1$, $y_{12} = y'_{11} = y''_1$ и т.д. ...

$y_{1m_1-1} = y'_{1m_1-2} = y_1^{(m_1-1)}$.

Тогда $y_1^{(m_1)} = y'_{1m_1-1}$.

$\vdots$

$y_{k0} = y_k$ - переобозначение, новые: $y_{k1} = y'_{k0} = y'_k$,

$y_{k2} = y'_{k1} = y''_k$

и т.д.

...

$y_{km_k-1} = y'_{km_k-2} = y_k^{(m_k-1)}$.

Тогда $y_k^{(m_k)} = y'_{km_k-1}$.

Всего получим $n = \sum_{j=1}^{k} m_j$ новых искомых функций y_{ji}, $j = \overline{1,k}$, $i = \overline{0, m_j - 1}$, а система (1.2) приобретет вид

$$\begin{cases} y'_{j0} = y_{j1}, \\ y'_{j1} = y_{j2}, \\ \vdots \\ y'_{jm_j-2} = y_{jm_j-1}, \\ y'_{jm_j-1} = f_j\left(x, y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1m_1-1}, y_{j0}, \dots, y_{j1}, \dots, y_{jm_j-1}, \dots, y_{k0}, y_{k1}, \dots, y_{km_k-1}\right) \\ j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

●

В связи с этим далее будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} y'_j = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1.3}$$

Определение. Система n ОДУ 1-го порядка вида (1.3), т.е. разрешенных относительно производных искомых функций, называется системой в ***нормальной форме Коши***.

Замечание 1.2. ОДУ n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ есть частный случай канонической системы (1.2) при $k = 1$.

Следовательно, по **лемме 1.1** оно эквивалентно системе n уравнений вида

$$\begin{cases} y'_0 = y_1, \\ y'_1 = y_2, \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1}, \\ y'_{n-1} = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Замечание 1.3. Не принципиально, но удобнее $n := n + 1$.

Определение. ***Линейной*** СОДУ в нормальной форме Коши называется система вида

$$\begin{cases} y_j' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k(x) + f_j(x), \\ \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Определение. ЛСОДУ в НФК (1.4) называется ***однородной***, если $f_j(x) \equiv 0$, $j = \overline{1, n}$, $\forall x \in I$;
в противном случае - ***неоднородной***.

Удобно ввести векторные обозначения $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ и $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$.

Вводя в дополнение матрицу A: $A(x) = A_{n\times n} = \left(a_{jk}(x)\right)$ и $\frac{d}{dx} A(x) = \left(\frac{d}{dx} a_{jk}(x)\right)$, ЛСОДУ в НФК (1.4) можно записать в векторном виде

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x). \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x). \tag{1.5од}$$

Замечание 1.4. Оператор $L = E\frac{d}{dx} - A$ - линейный.

○ $L\left(\sum_{i=1}^{k} C_i \vec{u}_i\right) = E\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{k} C_i \vec{u}_i - A\sum_{i=1}^{k} C_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{k} C_i E\frac{d}{dx}\vec{u}_i - \sum_{i=1}^{k} C_i A\vec{u}_i =$
$= \sum_{i=1}^{k} C_i \left(E\frac{d}{dx}\vec{u}_i - A\vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} C_i \left(E\frac{d}{dx} - A\right)\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{k} C_i L\,\vec{u}_i$.●

Непосредственным следствием являются принципы суперпозиции, аналогичные ПС для ЛОДУ.

ПС1 $\frac{d}{dx}\vec{y}_1(x) = A(x)\vec{y}_1(x)$, $\frac{d}{dx}\vec{y}_2(x) = A(x)\vec{y}_2(x) \rightarrow \vec{y} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2$: $\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x)$.
○ Доказать самим. ●

ПС2 $\frac{d}{dx}\vec{y}_1(x) = A(x)\vec{y}_1(x) + f_1(x)$, $\frac{d}{dx}\vec{y}_2(x) = A(x)\vec{y}_2(x) + f_2(x) \rightarrow \vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$:
$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + f_1(x) + f_2(x)$.
○ Доказать самим. ●

ПС3 $\frac{d}{dx}\vec{y}_1(x) = A(x)\vec{y}_1(x) + f(x)$, $\frac{d}{dx}\vec{y}_2(x) = A(x)\vec{y}_2(x) + f(x) \rightarrow \vec{y} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2$:
$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x)$.
○ Доказать самим. ●

Определение. Вектор-функции $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на промежутке I, если $\exists C_j = const,\ j = \overline{1,n}$: $\sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)^2 \neq 0$ и $\forall x \in I$ $\sum_{j=1}^{n} C_j \vec{y}_j(x) \equiv \vec{0}$.

В противном случае они ***линейно независимы***.

Замечание 1.1. Понятие линейной зависимости вектор-функций на промежутке I (содержащем более одной точки) отличается от известного из линейной алгебры понятия линейной зависимости векторов.

Если вектор-функции $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы на промежутке I, то $\forall x \in I$ их значения являются линейно зависимыми векторами.

Обратное неверно.

Пример 1.1. Вектор функции $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ при любом фиксированном x являются линейно зависимыми векторами:

$\forall x = x* \ C_1\vec{y}_1(x*) + C_2\vec{y}_2(x*) = \vec{0}$, если $C_1 = -x*$, а $C_2 = 1$.

Но при $x = \hat{x} \neq x*$ $C_1\vec{y}_1(\hat{x}) + C_2\vec{y}_2(\hat{x}) = -x*\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{x}^2 \\ \hat{x}^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$: как вектор функции $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ на $\forall I$ линейно независимы, так как при постоянных C_1 и C_2 равенство $C_1\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ достигается лишь при $C_1 = C_2 = 0$.■

Замечание 1.2. Существенно на каком промежутке I заданы вектор-функции $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$.

Пример 1.2. Вектор функции $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^5 \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x^2|x| \\ x^4|x| \end{pmatrix}$ на $I = [0,1]$ являются линейно зависимыми векторами, а на $I = [-1,1]$ они линейно независимы.■

Определение. ***Детерминантом (определителем) Вронского*** или ***вронскианом*** n-мерных вектор-функций $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ называют детерминант матрицы, столбцы которой образуют эти вектор-функции

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{1_1}(x) & \cdots & y_{n_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1_n}(x) & \cdots & y_{n_n}(x) \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

Лемма 1.1. Если вектор-функции $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы на I, то их вронскиан $W(x) \equiv 0\ \forall x \in I$.

○ У системы $\sum_{j=1}^{n} C_j \vec{y}_j(x) \equiv \vec{0}$ относительно $C_j = const,\ j = \overline{1,n}$ существует нетривиальное решение $\forall x \in I$.

Значит определитель основной матрицы этой системы $W(x) = \begin{vmatrix} y_{1_1}(x) & \cdots & y_{n_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1_n}(x) & \cdots & y_{n_n}(x) \end{vmatrix} = 0 \ \forall x \in I.$

●

Следствие. Если $W(x) \equiv/\equiv 0$ на I, то вектор-функции $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ линейно независимы

○ От противного:

Пусть $\exists x* \in I\colon W(x*) \neq 0$.

Если бы вектор-функции $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ были линейно зависимы на I, то по **лемме 1.1** $W(x) \equiv 0 \ \forall x \in I$, в том числе и для $x = x*$. Противоречие.

●

Замечание 1.3. Эти утверждения справедливы для любых вектор-функций, а не только решений СЛОДУ.

Задача Коши.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \\ \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, x_0 \in I. \end{cases} \tag{1.7}$$

Теорема 1.1. (существования и единственности)

Если $a_{jk}(x) \in C(I), j, k = \overline{1, n}$,

$f_j(x) \in C(I), j = \overline{1, n}$,

то на I существует единственное решение задачи Коши (1.7).

Доказательство позже (лекция 15).

Лемма 1.2. Если $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ решения

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) \tag{1.5од}$$

и их вронскиан $W(x) = 0$ хотя бы для одного $\exists x \in I$, то эти функции линейно зависимы.

○ Пусть $\exists x_0 \in I\colon W(x_0) = 0$.

Следовательно, столбцы $\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)$ линейно зависимы,

т.е. $\exists C_j = const, j = \overline{1, n}\colon \sum_{j=1}^{n} (C_j)^2 \neq 0$ и $\sum_{j=1}^{n} C_j \vec{y}_j(x_0) = \vec{0}$.

Рассмотрим $\vec{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{y}_j(x)$.

- По ПС1 это решение (1.4од).
- $\vec{y}(x_0) = \vec{0}$ по построению.

Но $\vec{y}^*(x) = \vec{0}$ есть решение задачи Коши $\begin{cases} \frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x), \\ \quad \vec{y}(x_0) = \vec{0}. \end{cases}$

Следовательно, по **теореме 1.1** $\vec{y}(x) = \vec{y}^*(x) = \vec{0}$,

т.е. $\sum_{j=1}^{n} C_j \vec{y}_j(x) = \vec{0} \ \forall x \in I$,

следовательно, $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы.

●

Следствие (альтернатива).

Если $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ решения (1.4од), $W(x)$ - их вронскиан, то
либо $W(x) \equiv 0 \ \forall x \in I$,
либо $W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$.

Замечание 1.4. Существенно, что $W(x)$ - вронскиан решений (1.5од).

Пример 1.3. Вектор функции $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^5 \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x^2|x| \\ x^4|x| \end{pmatrix}$ на $I = [-1,1]$ линейно независимы, но при $x* = 0 \in I$ $W(x*) = W(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.■

Определение. ***ФСР*** (***фундаментальной системой решений***) СЛОДУ (1.5од) называют n линейно-независимых решений (1.5од) $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$,
а матрицу $Y(x) = \left(\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)\right)$ - ***фундаментальной матрицей***.

Замечание 1.5. $W(x) = det\, Y(x) \neq 0$.

Теорема 1.2. ФСР существует.

○ Будем в качестве начальных условий (НУ) в задаче Коши (1.7) выбирать столбцы единичной матрицы

$$\vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{y}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } y_{n_i}(x_0) = \delta_{ni} = \begin{cases} 0, & n \neq i, \\ 1, & n = i. \end{cases}$$

Тогда $W(x_0) = 1 \neq 0$.
Следовательно, $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ линейно независимы, т.е. образуют ФСР.
●

Замечание 1.6. В качестве НУ можно выбирать столбцы любой матрицы $B_{n \times n} = \left(b_{jk}\right)$ такой, что $b_{jk} = const$ и $det\, B \neq 0$.

Лемма 1.3. Если $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ - ФСР, то $\vec{y}(x) = Y(x)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ - решение однородной СЛОДУ (1.5од) $\forall C_j = const,\ j = \overline{1,n}$.

○ Следствие ПС1. ●

Теорема 1.3. (об общем решении однородной СЛОДУ (1.5од))

Если $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ - ФСР (1.5од),
то любое его решение представимо в виде

$$\vec{y}(x) = Y(x)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

где $C_j = const$, $j = \overline{1,n}$.

○ Пусть $\vec{y}(x)$ - решение (1.4од), а $\vec{\phi}(x) = Y(x)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$.

По **лемме 1.3** $\vec{\phi}(x)$ решение (1.5од).
И пусть $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

Попробуем найти $\vec{\phi}(x) = Y(x)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ так, чтобы $\vec{\phi}(x_0) = \vec{y}_0$.

Система для нахождения $\vec{C}$: $Y(x_0)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \vec{y}_0$.

$det\, Y\,(x_0) = W(x_0) \neq 0$, следовательно, существует единственное решение $\vec{C}\,*$.
Т.о., построили $\vec{\phi}(x) = Y(x)\vec{C}\,*$: $\vec{\phi}(x_0) = \vec{y}_0$.
По **теореме 1.1** (существования и единственности) $\vec{y}(x) = \vec{\phi}(x)$, ч.т.д.

●