Лекция .

Гл. V. Операционный метод (преобразование Лапласа).

§1. Основные понятия.

Определение. ***Оригиналом*** называется функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1^0. $f(x) = 0$ при $x < 0$;

2^0. $f(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ кроме, быть может, конечного числа точек разрыва I рода;

3^0. $\exists M = const > 0$ и $\exists \alpha = const \geq 0$ такие, что $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$, $\forall x > 0$.

$f(x)$ - функция ограниченного роста: возрастает не быстрее показательной функции.
α - показатель роста $f(x)$.
Замечание $x \in \mathbb{R}$, а $f(x) \in \mathbb{C}$.
Замечание $M, \alpha \in \mathbb{R}$.

Замечание Пункт 1^0 кажется искусственным, но операционный метод приспособлен к решению Задачи Коши (ЗК=ДУ+НУ), а для физики совершенно безразлично, как ведут себя искомые функции до начального момента времени $(t := x)$, который всегда можно принять за $x = 0$.
Т.о., свойство 1^0 физически вполне естественно.

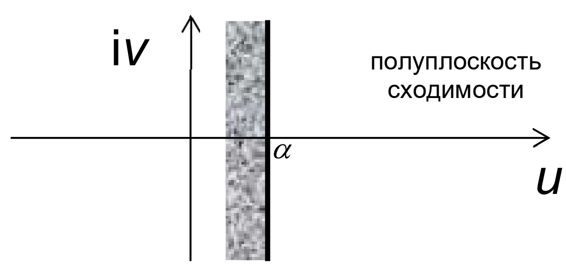
Определение. ***Преобразованием Лапласа*** функции $f(x)$ называется функция комплексного переменного $p = u + iv \in C$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx, \tag{1}$$

которую называют ***изображением*** функции $f(x)$ и символически записывают $f(x) \bullet\!\!=\!\!^\bullet F(p)$.

$p \in \mathbb{C}$ и возникает вопрос: в какой области комплексной плоскости функция $F(p)$ является определенной?

Теорема 1. Для любого оригинала $f(x)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $Re\, p > \alpha$, где α показатель роста $f(x)$.



○ Интеграл (1) - несобственный.

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx\right| \leq \int_0^\infty |e^{-px} f(x)|dx$$

❶ $|e^{-px}| = |e^{-ux-i}| = |e^{-ux}||e^{-iv}|$, но $e^{-ux} > 0$, а $|e^{-ivx}| = |\cos v\, x - i \sin v\, x| = \sqrt{\cos^2 v\, x + \sin^2 v\, x} = 1$, следовательно $|e^{-px}| = e^{-ux}$

❷ $f(x)$ - оригинал, следовательно $\exists M = const > 0$ и $\exists \alpha = const \geq 0$ такие, что $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$, $\forall x > 0$.

Т.о., $|F(p)| \leq \int_0^\infty e^{-ux} M e^{\alpha x} dx = M \int_0^\infty e^{-(u-\alpha)x} dx = \left.\frac{Me^{-(u-\alpha)x}}{-(u-\alpha)}\right|_0^\infty = \frac{M}{u-\alpha} < +\infty$.
●

Следствие. Если $F(p)$ - изображение, то оно удовлетворяет **необходимому условию** $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$
.

○ По **Теореме 1** $|F(p)| \leq \frac{M}{u-\alpha} \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$, $u = Re\, p$.●

Замечание 1. Символ $\bullet\!\!=\!\!^\bullet$ подчеркивает, что между $f(x)$ и $F(p)$ устанавливается соответствие, которое отражается также в терминах "оригинал" и "изображение".
Важно приучить себя рассматривать (1) как отображение, а не как вычисление интеграла.

Замечание 2. $p = u + iv \in C$, следовательно, к $F(p)$ применимы методы ТФКП.

Ну, а если речь идет об отображении, то возникает вопрос об обратном преобразовании Лапласа.
Теорема 2. ***Формула обращения*** (*без доказательства*).

Если функция $f(x)$ - оригинал, а $F(p)$ - ее изображение, то в любой точке своей непрерывности

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{px}F(p)dp, \qquad (2)$$

где интеграл берется по любой прямой $u = Re\,p > \alpha$, где α - показатель роста $f(x)$, и понимается в смысле главного значения.

Замечание $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{ux+ivx}F(u+iv)d(u+iv) = \frac{e^{ux}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx}F(u+iv)dv.$

Теорема 3. ***Единственности***.

Оригинал $f(x)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(x)$.

○ Значение оригинала $f(x)$ в точках разрыва не влияет на значение изображения $F(p)$, так как точек разрыва конечное число.

По **Теореме 2** в точках непрерывности $f(x)$ выражается через $F(p)$ по формуле (2).●

Замечания. ① Каждому оригиналу $f(x)$ соответствует единственное изображение $F(p)$.

② Если в какой-то точке оригинал определить по-иному, то изображение $F(p)$ не изменится.

③ Каждому изображению $F(p)$ соответствует бесконечное число оригиналов $f(x)$, отличающихся друг от друга на так называемые ***нулевые функции*** $N(x)$: $\int_0^x N(\xi)d\xi \equiv 0 \quad \forall x > 0$.

§2. Свойства преобразования Лапласа.

Пример 1. Преобразование Лапласа $\Theta(x)$.

○ Функция Хевиса́йда $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - оригинал.

$\Theta(x)_{\bullet} =^{\bullet} \int_0^{\infty} e^{-p}\ \ dx = \frac{e^{-px}}{-p}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$.●

Замечание. $\frac{1}{p} = \frac{1}{u+iv}$ представляет собой спектральную функцию для функции $e^{-ux}\Theta(x)$. Подробнее см. Дёч Г. «Руководство к практическому преобразованию Лапласа и z-преобразования». Гл. I, §3 п.1.

1⁰. Линейность. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - оригиналы, $f_1(x)_{\bullet} =^{\bullet} F_1(p)$, $f_2(x)_{\bullet} =^{\bullet} F_2(p)$, то $\forall C_1 = const \in C$, $\forall C_2 = const \in C$ $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ - оригинал и $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)_{\bullet} =^{\bullet} C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$.

○ $f_i(x)$, $i = 1,2$ - оригинал, т.е. $\exists M_i = const > 0$ и $\exists \alpha_i = const \geq 0$, $M_i, \alpha_i \in R$: $|f_i(x)| \leq M_i e^{\alpha_i x}$, $i = 1,2$.

Покажем, что $f(x) = \sum_{i=1}^{2} C_i f_i(x)$ - оригинал.

- $f(x) = 0$ при $x < 0$, т.к. $f_i(x) = 0$ при $x < 0$, $i = 1,2$;
- $f(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ кроме, быть может, конечного числа точек разрыва I рода, как линейная комбинация функций, непрерывных при $x \geq 0$ кроме, быть может, конечного числа точек разрыва I рода;
- Пусть $M = |C_1|M_1 + |C_2|M_2$, $\alpha = max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогда $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$,

следовательно, $f(x)$ - оригинал.

$f(x)_{\bullet} =^{\bullet} C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$ - следствие линейности сходящегося несобственного интеграла.●

Пример 2. $f(x) = e^{\beta x}$ - оригинал, $e^{\beta x}{}_{\bullet} =^{\bullet} \int_0^{\infty} e^{-px} e^{\beta x} dx = \frac{e^{-(p-\beta)x}}{-(p-\beta)}\Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{-(p-\beta)} = \frac{1}{(p-\beta)}$.

$f_1(x) = sin\,a\,x$ - оригинал. $sin\,a\,x = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$, следовательно $sin\,a\,x_{\bullet} =^{\bullet} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(p-ia)} - \frac{1}{(p+ia)}\right) = \frac{2ia}{2i(p^2+a^2)} = \frac{a}{(p^2+a^2)}$.

$f_2(x) = cos\,a\,x$ - оригинал. $cos\,a\,x = \frac{e^{iax} + e^{-ia}}{2}$, следовательно $cos\,a\,x_{\bullet} =^{\bullet} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-ia)} + \frac{1}{(p+ia)}\right) = \frac{2p}{2(p^2+a^2)} = \frac{p}{(p^2+a^2)}$.

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно:

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ - оригинал, но $f(x) = \frac{e^x}{x}$ и $f(x) = \frac{1}{x}$ нет.

Разбивать на слагаемые оригиналы опасно!

2⁰. Подобие (***теорема подобия***). $\forall a = const \in C$, $a \neq 0$ $\ f(ax)_{\bullet} =^{\bullet} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

○ $f(ax)_{\bullet} =^{\bullet} \int_0^{\infty} e^{-px} f(ax) dx = \begin{vmatrix} ax = y \\ dx = \frac{dy}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}y} f(y) dy = \frac{1}{a} F_1\left(\frac{p}{a}\right)$●

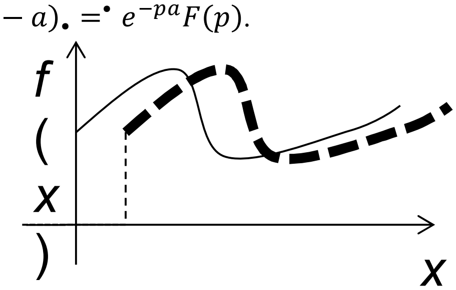
Следствие. Изображение $F(ap)$, $a = const \in C$, $a \neq 0$ соответствует оригиналу $\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$.

3⁰. Запаздывание (***1-ая теорема смещения***). $\forall a > 0$, $a \in R$ $\ f(x-a)_{\bullet} =^{\bullet} e^{-pa} F(p)$.

○ $f(x-a) \equiv 0$ при $x - a < 0$, т.е. $x < a$.

$f(x-a)_{\bullet} =^{\bullet} \int_0^{\infty} e^{-px} f(x-a) dx = \begin{vmatrix} x - a = y \\ dx = dy \end{vmatrix} = \int_0^{\infty} e^{-p(y+a)} f(y) dy =$

$= e^{-pa} \int_0^{\infty} e^{-py} f(y) dy = e^{-pa} F(p)$.●



Пример 3. Найти по изображению $e^{-3p}\frac{2}{p^2+4}$ оригинал.

○ $\sin 2x \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$, следовательно $\sin\big(2(x-3)\big)$ - искомый оригинал.

$x > 3$!!! При $x < 3$ оригинал $\equiv 0$.●

4⁰. Затухание. $e^{ax}f(x) \risingdotseq F(p-a) \quad \forall a \in C{:}\ Re(p-a) > \alpha$, где α - показатель роста $f(x)$.

○ $e^{ax}f(x) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-p}\ e^{ax}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(p-a)x}f(x)dx = F(p-a)$.●

Замечание Действительное затухание оригинала происходит, конечно, только в том случае, когда $Re\, a < 0$.

Пример 4. $e^{ax}\cos bx \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$.

5⁰. **Дифференцирование оригинала**. Пусть $f^{(k)}(x)$ - оригиналы, $k = \overline{1,n}$, $f(x) \risingdotseq F(p)$, тогда
$f^{(n)}(x) \risingdotseq p^nF(p) - f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \cdots - p^{n-1}f(0)$, где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{x\to 0+0} f^{(k)}(x)$, $k = \overline{0,n}$.

○ Доказательство по индукции.

① $f'(x) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-px}f'(x)dx = f(x)e^{-px}\big|_0^\infty - \int_0^\infty(-p)e^{-p}\ f(x)dx = -f(0) + pF(p)$.

② Пусть $g(x) = f^{(k)}(x) \risingdotseq p^kF(p) - f^{(k-1)}(0) - pf^{(k-2)}(0) - \cdots - p^{k-1}f(0) = G(p)$.

③ $f^{(k+1)}(x) = g'(x) \risingdotseq pG(p) - g(0) = p\left(p^kF(p) - f^{(k-1)}(0) - pf^{(k-2)}(0) - \cdots - p^{k-1}f(0)\right) - f^{(k)}(0) = = p^{k+1}F(p) - f^{(k)}(0) - pf^{(k-1)}(0) - p^2f^{(k-2)}(0) - \cdots - p^kf(0)$, ч.т.д. ●

Замечание. Это свойство является основой применения операционного метода к решению ЗК для ДУ.
При этом для ДУ с постоянными коэффициентами изображения получаются алгебраическими уравнениями.

СХЕМА

Пространство оригиналов	ДУ + НУ (ЗК)		решение ЗК
	⇩		⇧
	преобразование Лапласа		обратное преобразование Лапласа
	⇩		⇧
Пространство изображений	алгебраическое уравнение	⟹	решение

Замечание. Формула обращения (2) - комплексный интеграл.
Опираясь на Теорему 3, обращаются к таблице соответствий оригиналов и изображений.
Свойства 1^0-4^0 и 6^0-8^0 облегчают задачу.

6⁰. **Интегрирование оригинала**. Если $\int_0^x f(\xi)d\xi$ - оригинал, $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^x f(\xi)d\xi \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

○ Пусть $g(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ - оригинал.

$g(x) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-px}\int_0^x f(\xi)d\xi\, dx = \frac{e^{-px}}{-p}\int_0^x f(\xi)d\xi\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx = \frac{F(p)}{p}$.●

7⁰. **Дифференцирование изображения**. Если $f(x)$ - оригинал, то $(-x)^nf(x) \risingdotseq F^{(n)}(p)$.

○ $F^{(n)}(p) = \frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx = \int_0^\infty(-x)^ne^{-px}f(x)dx$. ●

Пример 5. $x\sin ax \risingdotseq -\frac{d}{dp}\frac{a}{p^2+a^2} = \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$.

8⁰. **Интегрирование изображения**. Если $\frac{f(x)}{x}$ - оригинал, $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $\frac{f(x)}{x} \risingdotseq \int_p^\infty F(\eta)d\eta$.

Замечание e^{ax} - оригинал, но $\frac{e^{ax}}{x}$ - нет.

○ $\int_p^\infty F(\eta)d\eta = \int_p^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\eta x} f(x)dx\right)d\eta =$ | $\int_0^\infty e^{-\eta x} f(x)dx$ - равномерно сходится по η | $=$ $\int_0^\infty f(x)\left(\int_p^\infty e^{-\eta x}d\eta\right)dx = \int_0^\infty f(x)\left(\frac{e^{-\eta x}}{-x}\Big|_p^\infty\right)dx = \int_0^\infty e^{-p} \frac{f(x)}{x}dx$, ч.т.д. ●

СООТВЕТСТВИЯ

(операции)

№	оригинал $f(x)$	изображение $F(p)$
1.	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
2.	$f(x-a)$	$e^{-pa}F(p)$
3.	$e^{ax}f(x)$	$F(p-a)$
4.	$f^{(n)}(x)$	$p^nF(p)-f^{(n-1)}(0)-pf^{(n-2)}(0)-\cdots-p^{n-1}f(0)$
5.	$\int_0^x f(\xi)d\xi$	$\frac{F(p)}{p}$
6.	$(-x)^nf(x)$	$F^{(n)}(p)$
7.	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_p^\infty F(\eta)d\eta$

СООТВЕТСТВИЯ

(функции)

№	оригинал $f(x)$	изображение $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3.	$\sin a\,x$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
4.	$\cos a\,x$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
5.	$e^{\beta x}\sin a\,x$	$\frac{a}{(p-\beta)^2+a^2}$
6.	$e^{\beta x}\cos a\,x$	$\frac{p-\beta}{(p-\beta)^2+a^2}$
7.	x	$\frac{1}{p^2}$
8.	x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9.	$xe^{\alpha x}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^2}$
10.	$x^n e^{\alpha x}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
11.	$x\sin a\,x$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
12.	$x\cos a\,x$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$