Лекция 14.

Гл. VI. Исследование задачи Коши.

§1. Введение (основные понятия - напоминание).

Определение. ***Нормальной системой в форме*** (виде) ***Коши*** называется система обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\vec{y}) \tag{1}$$

При этом $x \in I \subset \mathrm{R}^1_x$ - независимое переменное,

$I \in \{(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]\}$,

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in D \subset \mathrm{R}^n_{\vec{y}} \qquad \forall x \in I, \qquad y_i(x) \in C^1(I),\ i = \overline{1,n},$$

$G = I \times D \subset \mathrm{R}^{n+1}_{x,\vec{y}}$,

$$\vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\vec{y}) \end{pmatrix}, \qquad f_i(x,\vec{y}) \in C(G),\ i = \overline{1,n}.$$

Определение. Вектор-функция $\vec{y} = \vec{\phi}(x)$ называется решением СОДУ (1) на промежутке I, если

1^0 $\phi_i(x) \in C^1(I),\ i = \overline{1,n}$,

2^0 $\left(x,\vec{\phi}(x)\right) \in G \qquad \forall x \in I$,

3^0 $\frac{d}{dx}\vec{\phi}(x) \equiv \vec{f}\left(x,\vec{\phi}(x)\right)$**.**

Процесс нахождения решения (1) называется ***интегрированием*** СОДУ (1).

Всякое решение СОДУ (1) $\vec{\phi}(x)$ можно геометрически интерпретировать, как кривую в $(n+1)$- мерном пространстве $(x, y_1, \dots, y_n)$, которая называется ***интегральной кривой***.

Определение. ***Задачей Коши (начальной задачей)*** (ЗК) называется задача нахождения решения СОДУ (1), удовлетворяющему начальному условию (НУ)

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \tag{2}$$

где $x_0 \in I$, $(x_0,\vec{y}_0) \in I \times D = G \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$.

Т.е. из всех интегральных кривых нам надо выделить ту, которая проходит через точку $(x_0,\vec{y}_0) \in I \times D = G \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$.

Геометрическая интерпретация:

- в $G \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$ задано "поле направлений",
- интегральная кривая СОДУ (1) - касательная к которой в каждой точке имеет заданное направление.

Теорема 1. (существования и единственности). Если

- $f_i(x,\vec{y}) \in C(G),\ i = \overline{1,n}$ и
- $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(G),\ i,j = \overline{1,n}$,

то $\forall$ точки $(x_0,\vec{y}_0) \in G$ $\exists U(x_0) \in I$, в которой существует единственное решение $\vec{y}(x)$: $U(x_0) \to D \subset \mathrm{R}^n_{\vec{y}}$ задачи Коши (1), (2).

Замечание 1. Следует обратить внимание на локальный характер теоремы существования и единственности.

Замечание 2. Доказательство теоремы предварим рядом вспомогательных понятий и утверждений.

§2. Вспомогательные понятия и утверждения.

Определение. **Функция** $\vec{f}(x,\vec{y})$ в области $G = I \times D \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$ удовлетворяет ***условию Липшица*** относительно $\vec{y}$ равномерно по x, если $\exists L = const > 0$: $\forall (x,\vec{y}_1) \in G$ и $\forall (x,\vec{y}_2) \in G$ справедливо

$$\left\|\vec{f}(x,\vec{y}_1) - \vec{f}(x,\vec{y}_2)\right\| \le L\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \tag{3}$$

Число L называется ***постоянной Липшица***.

Обозначение

$$\vec{f} \in Lip_{\vec{y}}(G) \tag{4}$$

того факта, что функция $\vec{f}(x,\vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ равномерно по x в G.

Определение. Область $G \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$ называется ***выпуклой по переменной*** $\vec{y}$, если для любых двух точек $(x,\vec{y}_1) \in G$ и $(x,\vec{y}_2) \in G$ и $\forall \theta \in [0,1]$ точка $\big(x, \vec{y}_1 + \theta(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)\big) \in G$.

Лемма 1. Пусть B -

- выпуклое по $\vec{y}$,
- ограниченное замкнутое множество,
- такое, что $B \subset G \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$.

Если $\vec{f}(x,\vec{y})$: $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(B)$, $i,j = \overline{1,n}$, то $\vec{f} \in Lip_{\vec{y}}(B)$.

○ Рассмотрим сначала одну из компонент $\vec{f}$: $f_i = f_i(x,\vec{y})$, i - произвольное, но $i = \overline{1,n}$.
Зафиксируем x, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ такие, что $(x,\vec{y}_1) \in B$, $(x,\vec{y}_2) \in B$ - произвольные, но фиксированные.
В силу выпуклости множества B точка $(x,\vec{y}) \in B$, если $\vec{y} = \vec{y}_1 + \theta(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)$ при $\theta \in [0,1]$.
Введем в рассмотрение функцию $g(\theta) = f_i(x,\vec{y})$, тогда $g(0) = f_i(x,\vec{y}_1)$, $g(1) = f_i(x,\vec{y}_2)$.
По теореме Лагранжа о конечных приращениях $\exists \theta^* \in (0,1)$: $g(1) - g(0) = g'(\theta^*)$, т.е. $f_i(x,\vec{y}_2) - f_i(x,\vec{y}_1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,\vec{y}^*)}{\partial y_j}\big(y_{2j} - y_{1j}\big)$, здесь $\vec{y}^* = \vec{y}_1 + \theta^*(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)$.

По условию B – замкнуто и ограничено, $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(B)$, следовательно, $\exists K_{ij} = const > 0$: $\left|\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j}\right| \le K_{ij}$ для $\forall (x,\vec{y}) \in B$.

$|f_i(x,\vec{y}_2) - f_i(x,\vec{y}_1)| \le \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\left|y_{2j} - y_{1j}\right|$[1] $\le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {K_{ij}}^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|y_{2j} - y_{1j}\right|^2} \le L_i\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|$, где $L_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {K_{ij}}^2}$.

Тогда

$\left\|\vec{f}(x,\vec{y}_2) - \vec{f}(x,\vec{y}_1)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\big(f_i(x,\vec{y}_2) - f_i(x,\vec{y}_1)\big)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(L_i\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|)^2} = L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|$, где $L = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {L_i}^2}$.●

Замечание 3. Формально утверждение $\vec{f} \in Lip_{\vec{y}}(G)$ из условия $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(G)$, $i,j = \overline{1,n}$ не вытекает, так как единой для всей области G константы Липшица L может и не найтись.
Однако **локальная**, вблизи точки $(x_0,\vec{y}_0) \in G$ липшицевость из этого условия все же вытекает:

---

[1] Неравенство Коши-Буняковского $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 \sum_{j=1}^{n} {b_j}^2$.

○ $P(\xi) = \sum_{j=1}^{n}(a_j + \xi b_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 + \xi\sum_{j=1}^{n} 2a_j b_j + \xi^2\sum_{j=1}^{n} {b_j}^2$, $P(\xi) \ge 0 \;\Rightarrow\; D \le 0$, т.е. $\frac{D}{4} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 \sum_{j=1}^{n} {b_j}^2 \le 0$.●

заменив область G какой-либо ограниченной, замкнутой выпуклой окрестностью точки $(x_0, \vec{y}_0) \in G$ $U(x_0, \vec{y}_0) = B \subset G$, можно обеспечить липшицевость по $\vec{y}$ сужения $\vec{f}\big|_B$.

Замечание 4. В формулировке **Теоремы 1** условие $f_i(x, \vec{y}) \in C(G)$, $i = \overline{1, n}$ и $\frac{\partial f_i(x, \vec{y})}{\partial y_j} \in C(G)$, $i, j = \overline{1, n}$ можно заменить

1^0 более **сильным**, но легче проверяемым условием $f_i(x, \vec{y}) \in C^1(G)$, $i = \overline{1, n}$, слегка *ослабив* тем самым **Теорему 1**;

2^0 более **слабым**, хотя и более трудным для проверки требованием -

- непрерывности функции $\vec{f}(x, \vec{y})$ в G
- вместе с ее липшицевостью по $\vec{y}$ (в $U(x_0, \vec{y}_0)$!).

Лемма 2. Если $\vec{f}(x, \vec{y}) \in C(G)$, то функция $\vec{y}(x) \in C^1(I)$ - решение задачи Коши (1), (2) $\Leftrightarrow$ когда она удовлетворяет интегральному уравнению (ИУ)

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi)) d\xi, \quad (5)$$

$x \in I$, $x_0 \in I$.

Замечание 5. Решение ИУ (5) на том же промежутке!

○ ⇨ Пусть $\vec{y} = \vec{\phi}(x)$ решение задачи Коши (1), (2).

Тогда $\vec{f}\left(x, \vec{\phi}(x)\right) \equiv \frac{d}{dx}\vec{\phi}(x) \in C(I)$.

Заменив в этом тождестве x на ξ и проинтегрировав по ξ от x_0 до x, где x - произвольное, но из рассматриваемого промежутка I, а $x_0 \in I$, получим $\vec{\phi}(x) - \vec{\phi}(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} \vec{f}\left(\xi, \vec{\phi}(\xi)\right) d\xi$.

С учетом НУ (2)

$$\vec{\phi}(x) \equiv \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}\left(\xi, \vec{\phi}(\xi)\right) d\xi,$$

т.е. $\vec{\phi}(x)$ - решение ИУ (5).

⇦ Пусть $\vec{y} = \vec{\phi}(x)$ решение ИУ (5).

$\vec{f}\left(x, \vec{\phi}(x)\right) \in C(I)$, следовательно, $F(x) = \int_{x_0}^{x} \vec{f}\left(\xi, \vec{\phi}(\xi)\right) d\xi \in C^1(I)$ и $\frac{dF(x)}{dx} = \vec{f}\left(x, \vec{\phi}(x)\right)$.

Продифференцировав тождество $\vec{\phi}(x) \equiv \vec{y}_0 + F(x)$, получим $\frac{d}{dx}\vec{\phi}(x) \equiv \vec{f}\left(x, \vec{\phi}(x)\right)$. Т.о. $\vec{\phi}(x)$ - решение (1).

При этом из (5) имеем $\vec{\phi}(x_0) \equiv \vec{y}_0$, т.е выполнены НУ (2), т.е. $\vec{\phi}(x)$ - решение задачи Коши (1), (2).●

Замечание 4. Теорему 1 (существования и единственности) будем доказывать для ИУ (5) на основе принципа сжимающих отображений.

Определение. Отображение $A: D \to D$ называется ***сжимающим***, если $\exists q$: $0 \le q < 1$ и $\|A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2\| \le q\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$ для $\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in D$.

Определение. Точка $\vec{y} \in D$ называется неподвижной точкой отображения A, если $A\vec{y} = \vec{y}$.

Лемма 3. Любое сжимающее отображение замкнутого множества на себя имеет единственную неподвижную точку.

○ 1^0. Единственность неподвижной точки доказывается от противного.

Пусть $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2 \ne \vec{y}_1$ - неподвижные точки: $A\vec{y}_i = \vec{y}_i$, $i = 1,2$.

Так как $\vec{y}_1 \ne \vec{y}_2$, то $\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| > 0$.

Отображение Aсжимающее, следовательно $\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| = \|A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2\| \le q\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$, $0 \le q < 1$.

Получили, что $(1-q)\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \le 0$, но $1 - q > 0$, так как отображение A сжимающее, и $\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| > 0$, т.е. получили противоречие.

2^0. Существование неподвижной точки докажем, найдя ее.

$A: B \to B$ и $B = \bar{B}$ по условию.

Выберем произвольное $\vec{y}_0 \in B = \bar{B}$ и построим последовательность $\vec{y}_n = A\vec{y}_{n-1} = A^n\vec{y}_0$.

Покажем, что она фундаментальна, т.е. $\forall\varepsilon\ \exists N_\varepsilon : \forall m, k > N_\varepsilon\ \|\vec{y}_m - \vec{y}_k\| < \varepsilon$.
Действительно:
① $\|\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n\| = \|A\vec{y}_n - A\vec{y}_{n-1}\| \le q\|\vec{y}_n - \vec{y}_{n-1}\| \le \ldots q^n\|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\|$,
② $\|\vec{y}_m - \vec{y}_k\| = \|\vec{y}_m - \vec{y}_{m-1} + \vec{y}_{m-1} - \vec{y}_{m-2} + \cdots + \vec{y}_{k-2} - \vec{y}_{k-1} + \vec{y}_{k-1} - \vec{y}_k\| \le \|\vec{y}_m - \vec{y}_{m-1}\| + \|\vec{y}_{m-1} - \vec{y}_{m-2}\| + \ldots \ldots \le \|\vec{y}_m - \vec{y}_{m-1}\| + \|\vec{y}_{m-1} - \vec{y}_{m-2}\| + \cdots + \|\vec{y}_{k-2} - \vec{y}_{k-1}\| + \|\vec{y}_{k-1} - \vec{y}_k\| = (q^{m-1} + q^{m-1} + \cdots + q^{k+1})\|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\|$[2] $\le\ \le \frac{q^k(1-q^{m-k})}{1-q}\|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\|$[3] $\le \frac{q^k}{1-q}\|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\| = \varepsilon$.
Т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\vec{y}_n = \vec{y}^*$ и $\vec{y}^* = A\vec{y}^*$. Т.о. $\vec{y}^*$ - неподвижная точка. А так как множество B замкнуто, то $\vec{y}^* \in B$. ●

Лемма 4. Если $\vec{F}(x) \in C([a,b])$, то $\left\|\int_a^b \vec{F}(x)dx\right\| \le \int_a^b \left\|\vec{F}(x)\right\| dx$.

○ $\int_a^b \vec{F}(x)dx$ есть предел интегральных сумм Римана $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, и произвольной выборке.
$\left\|\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right\| \le \sum_{i=1}^n \left\|\vec{F}(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right\| \le \sum_{i=1}^n \left\|\vec{F}(\xi_i)\right\|(x_i - x_{i-1})$ в пределе и получим требуемое неравенство.●

§3. Доказательство теоремы существования и единственности.

План доказательства.

1) Решение задачи Коши (1), (2) будем искать как неподвижную точку оператора $A\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi))d\xi,\ x \in I,\ x_0 \in I$.
2) $A: B \to B$, где $B = \bar{B} \subset D$ - потребуется локальная ограниченность $\vec{f}(x, \vec{y})$.
3) A - сжимающий оператор (потребуется локальная ограниченность $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j}$, $i, j = \overline{1,n}$).

---

[2] $S = \sum\limits_{l=k}^{m-1} q^l$, $Sq = \sum\limits_{l=k}^{m-1} q^{l+1} = \sum\limits_{l=k+1}^{m} q^l$, $S(q-1) = q^m - q^k$.

[3] Здесь для определенности $m \ge k$.