Лекция 15.

Гл. VI. Исследование задачи Коши.

§3. Доказательство теоремы существования и единственности.

Теорема 3.1. (существования и единственности).

Если $\vec{f}(x,\ \vec{y}) \in C(G)$, $\dfrac{\partial f_i(x,\ \vec{y})}{\partial y_j} \in C(G)$ $\forall i, j = \overline{1,n}$, область $G = I \times D \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$,

то $\forall$ точки $(x_0,\ \vec{y}_0) \in G$ $\exists U(x_0) \subset I$,

в которой решение $\vec{y}(x): U(x_0) \to D \subset \mathbb{R}^n_{\vec{y}}$ задачи Коши

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\ \vec{y}), \tag{1}$$

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \tag{2}$$

существует и единственно.

○

① Опираясь на лемму 2 (лекция 14) используем, что интегральное уравнение

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi,\ \vec{y}(\xi))d\xi,\ x \in I,\ x_0 \in I$$

эквивалентно задаче Коши (1)-(2).

Будем использовать метод последовательных приближений Пикара, вводя оператор

$$A\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi,\ \vec{y}(\xi))d\xi,\ x \in I,\ x_0 \in I.$$

как неподвижную точку оператора $A\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi,\ \vec{y}(\xi))d\xi$, $x \in I$, $x_0 \in I$.

Таким образом, $\vec{y}(x)$ - решение = неподвижная точка A.

Строим последовательность $\{\vec{\varphi}_k(x)\}_1^\infty$:

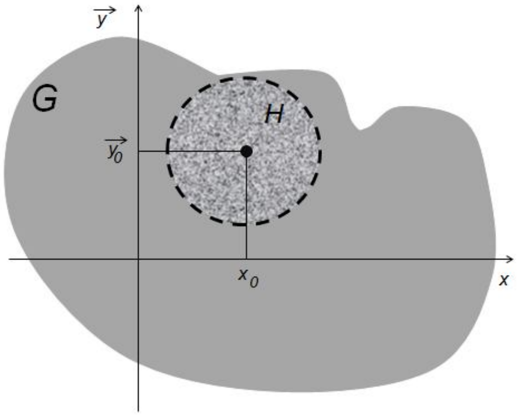
- $\vec{\varphi}_0(x)$ выбираем произвольно, но
  - $\vec{\varphi}_0(x) \in C(\tilde{I})$, $x_0 \in \tilde{I} \subset I$;
  - $\|\vec{\varphi}_0(x) - \vec{y}_0\| \le R^*$ (о выборе $\tilde{I}$ и R^* позже);

  желательно, но не обязательно, чтобы $\vec{\varphi}_0(x) \in \vec{y}_0$;
- $\vec{\varphi}_{k+1}(x) = A\vec{\varphi}_k(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}_k(\xi))d\xi$.

Заметим, что $\vec{\varphi}_{k+1}(x) = A^{k+1}\vec{\varphi}_0(x)$ и $\vec{\varphi}_{k+1}(x_0) = \vec{y}_0$, $k \ge 1$, по построению.

② Построим $U(x_0) = \Omega_{\delta_0, R_0}$ такую, что $A: B \to B \subset D$, где $B = \overline{\Omega}_{\delta_0, R_0}$ (используем локальную ограниченность $\vec{f}(x,\ \vec{y}) \in C(G)$).

Для этого выберем целиком лежащий в G замкнутый шар $H = \left\{(x,\ \vec{y}): (x - x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i(x) - y_{0i})^2 \le R\right\}$. Заметим, что $H = \overline{H}$ по построению.

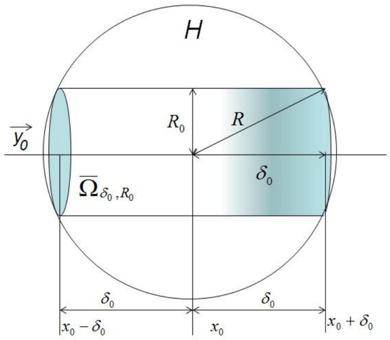


Это возможно, так как G - область, т.е. содержит точку $(x_0,\, \vec{y}_0)$ вместе с открытой шаровой окрестностью, которая в свою очередь содержит меньшую шаровую окрестность, но уже замкнутую.

Построим теперь $\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0}$ - ограниченное замкнутое.

$\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0} \subset H \subset G$.

$\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0} = \{(x,\, \vec{y}) \in H : |x - x_0| \le \delta_0 < R,\, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le R_0 < R\}$.



$\delta_0{}^2 + R_0{}^2 = R^2$.

Причем δ_0 выберем исходя из $\vec{f}(x,\, \vec{y})$.

☼ $\vec{f}(x,\, \vec{y})$ непрерывна в G по условию ⇨ непрерывна в $H \subset G$ ⇨ ограничена в H (напомним, что $H = \overline{H}$ замкнуто по построению).

Таким образом, $\exists M = const > 0 : \|\vec{f}(x,\, \vec{y})\| \le M \quad \forall x \in I \cap H = [x_0 - R,\, x_0 + R]$.

Пусть (для определенности) $x \ge x_0 \quad \forall x \in [x_0 - R,\, x_0 + R]$, т.е. $\forall x \in [x_0,\, x_0 + R]$.

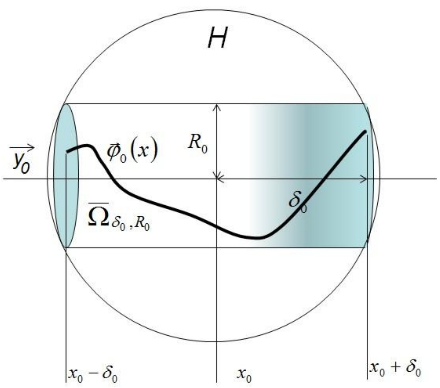
По Лемме 4 (лекция 14)

$$\|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{y}_0\| \le \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(\xi,\, \vec{y}(\xi))\| d\xi \le \int_{x_0}^{x} M d\xi \le M(x - x_0).$$

Случай $x < x_0$ рассматривается аналогично.

Итак, получили $\|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{y}_0\| \le M|x - x_0|$ для $\forall x \in [x_0 - R,\, x_0 + R]$.

Положим $\delta_0 = \dfrac{R_0}{M}$. При этом $R_0{}^2\left(\dfrac{1}{M^2} + 1\right) = R^2$ ⇨ $R_0 = \dfrac{RM}{\sqrt{1 + M^2}}$ и $\delta_0 = \dfrac{R}{\sqrt{1 + M^2}}$.



Возвращаясь к выбору $\widetilde{I}$ и R^*:

$\widetilde{I} = [x_0 - \delta_0,\, x_0 + \delta_0]$, $R^* = R_0$.

Тогда $\|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{y}_0\| \le M(x - x_0) \le M\delta_0 = R_0$.

Таким образом, $\{\vec{\varphi}_k(x)\}_1^\infty$ - последовательность, не выводящая из $\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0}$: $A\vec{\varphi}_k(x) \in \overline{\Omega}_{\delta_0, R_0}$. Т.е., оператор $A : \overline{\Omega}_{\delta_0, R_0} \to \overline{\Omega}_{\delta_0, R_0}$.

③ Покажем теперь, что можно выбрать $\delta_1 \le \delta_0$ так, чтобы оператор A был сжимающим, используя локальную ограниченность $\dfrac{\partial f_i(x,\, \vec{y})}{\partial y_j} \in C(G) \quad \forall i, j = \overline{1, n}$.

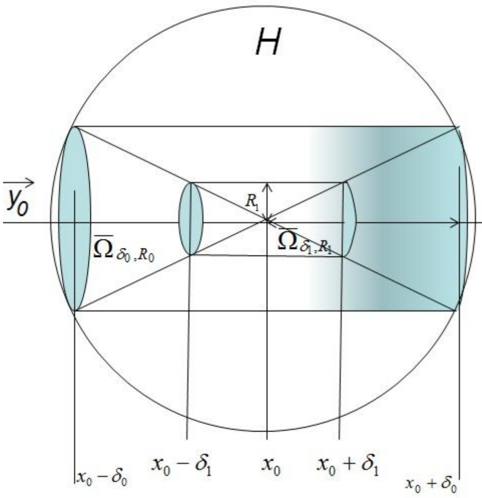
☼ $\frac{d}{d\vec{y}}\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в G по условию ⇨ непрерывна в $\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0} \subset G$ ⇨ ограничена в $\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0}$.

Т. е., $\exists L = const > 0$: $\left\| \frac{d}{d\vec{y}}\vec{f}(x, \vec{y}) \right\| \le L \quad \forall x \in I \cap \overline{\Omega}_{\delta_0, R_0} = [x_0 - \delta_0,\, x_0 + \delta_0]$.

Подробнее: $\frac{\partial f_i(x, \vec{y})}{dy_j} \in C(G)$ по условию ⇨ $\frac{\partial f_i(x, \vec{y})}{dy_j} \in C(\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0})$ ⇨ $\exists K_{ij} = const > 0$, $i, j = \overline{1, n}$: $\left| \frac{\partial f_i(x, \vec{y})}{dy_j} \right| \le K_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Норма Фробениуса (подчинена Евклидовой) $\left\| \frac{d}{d\vec{y}}\vec{f}(x, \vec{y}) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \vec{y})}{dy_j}} =$ $= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}} = L$.

По Лемме 1 (лекция 14) $\vec{f}(x, \vec{y}) \in Lip_{\vec{y}}(\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0})$, т.е. $\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in D \cap (\overline{\Omega}_{\delta_0, R_0})$ и $\forall x \in I \cap \overline{\Omega}_{\delta_0, R_0} = [x_0 - \delta_0,\, x_0 + \delta_0]$ выполнено $\|\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1)\| \le L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|$.



Если $\frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{R_0}{R_1}$, то получим $\tilde{R}^2 = \delta_1^{\,2} + R_1^{\,2} =$ $= \delta_1^{\,2}\left(1 + \left(\frac{R_0}{\delta_0}\right)^2\right) = \delta_1^{\,2}(1 + M^2)$.

При этом для $x \in I \cap \overline{\Omega}_{\delta_1, R_1} = [x_0 - \delta_1,\, x_0 + \delta_1]$ получим $\|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{y}_0\| \le M|x - x_0| \le M\delta_1 = R_1$.

То есть, оператор $A: \overline{\Omega}_{\delta_1, R_1} \to \overline{\Omega}_{\delta_1, R_1}$ как только $\|\vec{\varphi}_0(x) - \vec{y}_0\| \le R_1$.

Т.о., выбираем $\tilde{I} = [x_0 - \delta_1,\, x_0 + \delta_1]$, $R^* = R_1$.

Итак, $R_1 = M\delta_1$, $R_1 = \frac{\tilde{R}M}{\sqrt{1 + M^2}} < \tilde{R} \le R$ и $\delta_1 = \frac{\tilde{R}}{\sqrt{1 + M^2}} \le \frac{R}{\sqrt{1 + M^2}} = \delta_0$.

Пусть теперь функции $\vec{\varphi}(x)$ и $\vec{\psi}(x)$: $\forall x \in [x_0 - \delta_1,\, x_0 + \delta_1]$

$\|\vec{\varphi}(x) - \vec{y}_0\| \le R_1 = M\delta_1$ и

$\|\vec{\psi}(x) - \vec{y}_0\| \le R_1 = M\delta_1$.

Заметим, что при этом $A^k\vec{\varphi}(x) \in \overline{\Omega}_{\delta_1, R_1}$, поскольку

$$\|A\vec{\varphi}(x) - \vec{y}_0\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(\xi, \vec{\varphi}(\xi))\| d\xi \right| \le M|x - x_0| \le M\delta_1 = M\frac{R_1}{M} = R_1.$$

Аналогично $A^k\vec{\psi}(x) \in \overline{\Omega}_{\delta_1, R_1}$.

Оценим $\|A\vec{\varphi}(x) - A\vec{\psi}(x)\|$:

$$\left\|A\vec{\varphi}(x)-A\vec{\psi}(x)\right\|=\left\|\int\limits_{x_0}^{x}\left[\vec{f}(\xi,\vec{\varphi}(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\psi}(\xi))\right]d\xi\right\| \le \text{(Лемма 4)} \le$$

$$\le\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left\|\vec{f}(\xi,\vec{\varphi}(\xi))-\vec{f}(\xi,\vec{\psi}(\xi))\right\|d\xi\right| \le \text{(Лемма 1)} \le \left|\int\limits_{x_0}^{x}L\left\|\vec{\varphi}(\xi)-\vec{\psi}(\xi)\right\|d\xi\right| \le$$

$$\le L\max_{\xi\in[x_0-\delta_1,\,x_0+\delta_1]}\left\|\vec{\varphi}(\xi)-\vec{\psi}(\xi)\right\|\left|x-x_0\right|.$$

Если теперь выбрать равномерную по x норму (из сходимости по одной норме следует сходимость по другой норме), то

$\left\|A\vec{\varphi}(x)-A\vec{\psi}(x)\right\|\le q\left\|\vec{\varphi}(\xi)-\vec{\psi}(\xi)\right\|$, где $q=L\left|x-x_0\right|$, $x\in[x_0-\delta_1,\,x_0+\delta_1]$.

Отображение будет сжимающим при $q<1$, т.е. при $\left|x-x_0\right|<\dfrac{1}{L}$.

$\left|x-x_0\right|<\delta_1 \Rightarrow \delta_1<\dfrac{1}{L}$. Удобно усилить $\delta_1<\dfrac{1}{L+1}$.

Выберем теперь $\delta_1=\min\left\{\dfrac{1}{L+1},\,\delta_0\right\}$.

При этом отображение A является сжимающим, т.е. по Лемме 3 (лекция 14) у него существует единственная неподвижная точка.

●

§4. Замечания.

Замечание 1. Доказательство теоремы носит существенно локальный характер: существование единственного решения ЗК (1)-(2) гарантируется лишь в малой $U_{\delta_1}(x_0)$ - δ_1-окремтности т. x_0: $U_{\delta_1}(x_0)=[x_0-\delta_1,\,x_0+\delta_1]$, где $\delta_1=\min\left\{\dfrac{1}{L+1},\,\dfrac{R_0}{M}\right\}$.

Величина отрезка $[x_0-\delta_1,\,x_0+\delta_1]$зависит от
- функции $\vec{f}(x,\,\vec{y})$,
- области G,
- точки $(x_0,\,\vec{y}_0)\in G$.

Замечание 2. Вопрос о существовании решения уравнения важен, когда уравнение (1) не интегрируется в квадратурах - для применения численных или асимптотических методов решения надо быть уверенным в существовании и единственности решения.

Замечание 3. Если при построении решения в $U_{\delta_1}(x_0)$ мы не вышли их той области G, где $\vec{f}(x,\,\vec{y})$
- опеределена,
- непрерывна,
- удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ равномерно x,

то найденное решение может быть продолжено единственным образом:

$x_0^{(1)} = x_0 + \delta_1$, $\vec{y}_0^{(1)} = \vec{y}\left(x_0^{(1)}\right)$ и $\left(x_0^{(1)}, \vec{y}_0^{(1)}\right) \in G$.

По Теореме 1 $\exists \delta_1^{(1)}$: существует единственно решение новой ЗК в $U_{\delta_1^{(1)}}\left(x_0^{(1)}\right)$.

И т.д.

§5. О продолжимости решений.

Пусть $\vec{y}_1(x) = \vec{\varphi}_1(x)$ - решение (1) $\forall x \in I_1$,

$\vec{y}_2(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ - решение (1) $\forall x \in I_2$.

И $I_1 \neq I_2$, $I = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, а $\vec{\varphi}_1(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ $\forall x \in I_1$.

① $I_1 \subseteq I_2$ и $\vec{\varphi}_1(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ $\forall x \in I_1$.

Определение. Говорят, что $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ является ***продолжением*** решения $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}_1(x)$ с I_1 на I_2, или, что решение $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}_1(x)$ есть сужение решения $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ с I_2 на I_1.

② $\exists\, I = I_1 \cap I_2$: $\vec{\varphi}_1(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ $\forall x \in I$.

Определение. Говорят, что решения (1) $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}_1(x)$ и $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}_2(x)$ являются ***продолжением*** одно другого, а $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}^*(x) = \begin{cases} \vec{\varphi}_1(x), & x \in I_1, \\ \vec{\varphi}_2(x), & x \in I_2 \end{cases}$ - решение (1) $\forall x \in I_1 \cup I_2$.

Если I вырождается в точку, то происходит ***стыковка*** решений, тоже являющаяся решением (1).

Определение. Решение о $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}(x)$ на I векторного уравнения (системы) (1) называется ***непродолжаемым*** (***максимально продолженным***), если не существует никакого другого решения (1), являющегося его продолжением.