Лекция 16 (2).

Гл. VI. Исследование задачи Коши.

Задача Коши

$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\vec{y}),$ (1)

$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ (2)

При этом $x \in I \subset R_x^1$ - независимое переменное,

$I \in \{(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]\}$,

$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}: I \to D \subset R_{\vec{y}}^n \quad \forall x \in I, \quad y_i(x) \in C^1(I), i = \overline{1,n},$

$G = I \times D \subset R_{x,\vec{y}}^{n+1}$,

$\vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\vec{y}) \end{pmatrix}, \quad f_i(x,\vec{y}) \in C(G), i = \overline{1,n}.$

Теорема 1 (лекция 15) гарантирует существование единственного решения ЗК (1)-(2) лишь в малой $U_{\delta_1}(x_0)$ - δ_1-окрестности т. x_0: $U_{\delta_1}(x_0) = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, где $\delta_1 = min\left\{\frac{1}{L+1}, \frac{R}{\sqrt{1+M^2}}\right\}$.

§5. О продолжимости решений.

Пусть $\vec{y}_1(x) = \vec{\phi}_1(x)$ - решение (1) $\forall x \in I_1$,

$\vec{y}_2(x) = \vec{\phi}_2(x)$ - решение (1) $\forall x \in I_2$.

И $I_1 \neq I_2$, $I = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, а $\vec{\phi}_1(x) = \vec{\phi}_2(x)$ $\forall x \in I_1$.

① $I_1 \subset I_2$ и $\vec{\phi}_1(x) = \vec{\phi}_2(x)$ $\forall x \in I_1$.

Определение. Говорят, что $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_2(x)$ является ***продолжением*** решения $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_1(x)$ с I_1 на I_2, или, что решение $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_1(x)$ есть сужение решения $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_2(x)$ с I_2 на I_1.

② $\exists I = I_1 \cap I_2$: $\vec{\phi}_1(x) = \vec{\phi}_2(x)$ $\forall x \in I$. $I \neq I_1, I \neq I_2$.

Определение. Говорят, что решения (1) $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_1(x)$ и $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_2(x)$ являются ***продолжением*** одно другого, а $\vec{y}(x) = \vec{\phi}^*(x) = \begin{cases} \vec{\phi}_1(x), & x \in I_1, \\ \vec{\phi}_2(x), & x \in I_2 \end{cases}$ - решение (1) $\forall x \in I_1 \cup I_2$.

Если I вырождается в точку, то происходит ***стыковка*** решений, тоже являющаяся решением (1).

Определение. Решение о $\vec{y}(x) = \vec{\phi}(x)$ на I векторного уравнения (системы) (1) называется ***непродолжаемым*** (***максимально продолженным***), если не существует никакого другого решения (1), являющегося его продолжением.

Теорема 5.1 (о продолжении решения до границы ограниченной области).

Пусть $\vec{f}(x,\vec{y}) \in C(G)$, $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(G)$ $\forall i,j = \overline{1,n}$, т.е $\vec{f}(x,\vec{y})$удовлетворяет в области $G = I \times D \subset \mathrm{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$ условиям **теоремы 1** (существования и единственности) (лекция 15).

И пусть G_0 - ограниченная область с границей ∂G_0 такая, что $G_0 \cup \partial G_0 = \bar{G}_0 \subset G$.

Тогда любое решение уравнения

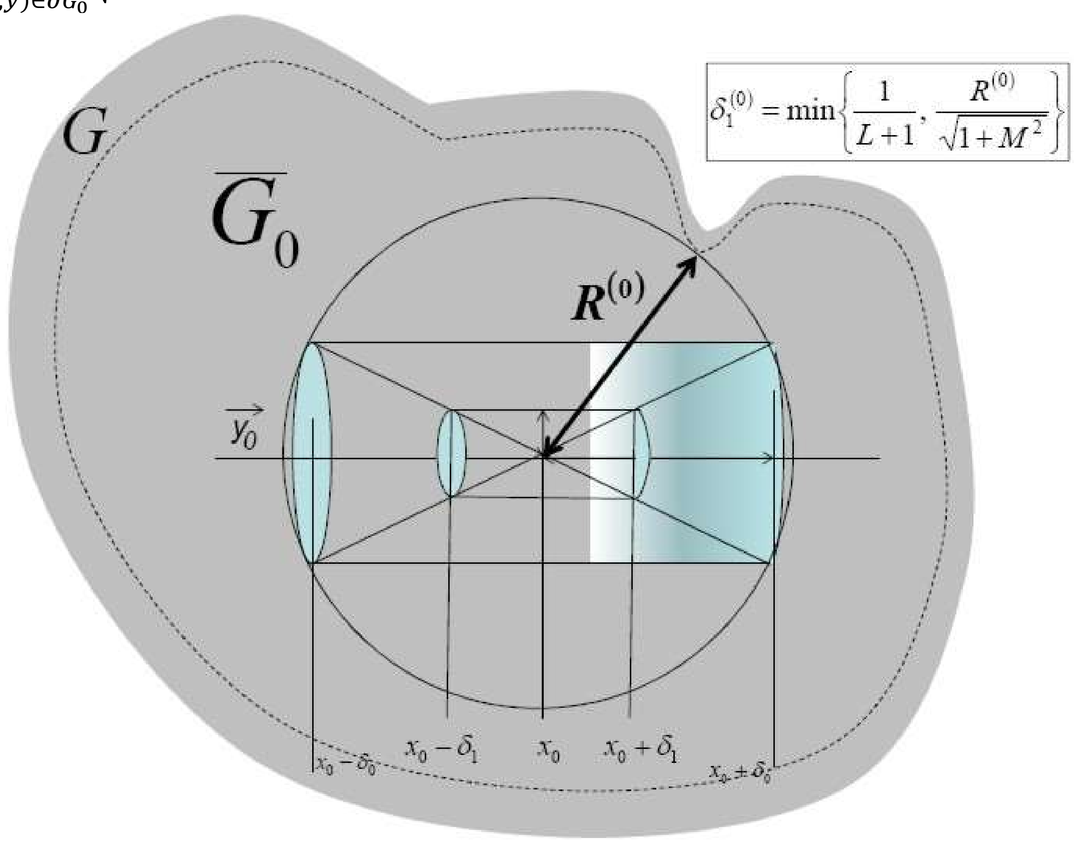
$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\vec{y}), \tag{1}$$

проходящее внутри G_0, можно продолжить в обе стороны до выхода его графика на границу области G_0 (∂G_0),

т.е. продолжить на такой отрезок $[a,b]$, что точки $\big(a,\vec{y}(a)\big) \in \partial G_0$, $\big(b,\vec{y}(b)\big) \in \partial G_0$ (лежат на границе области G_0).

○

① ❶ Выбираем точку $P_0 = (x_0,\vec{y}_0) \in G_0$ так, что $\rho(P_0,\partial G_0) = \inf\limits_{(x,\vec{y})\in\partial G_0} \sqrt{(x-x_0)^2 + \sum_{j=1}^{n}\big(y_j - y_{0j}\big)^2} = R^{(0)} > 0.$

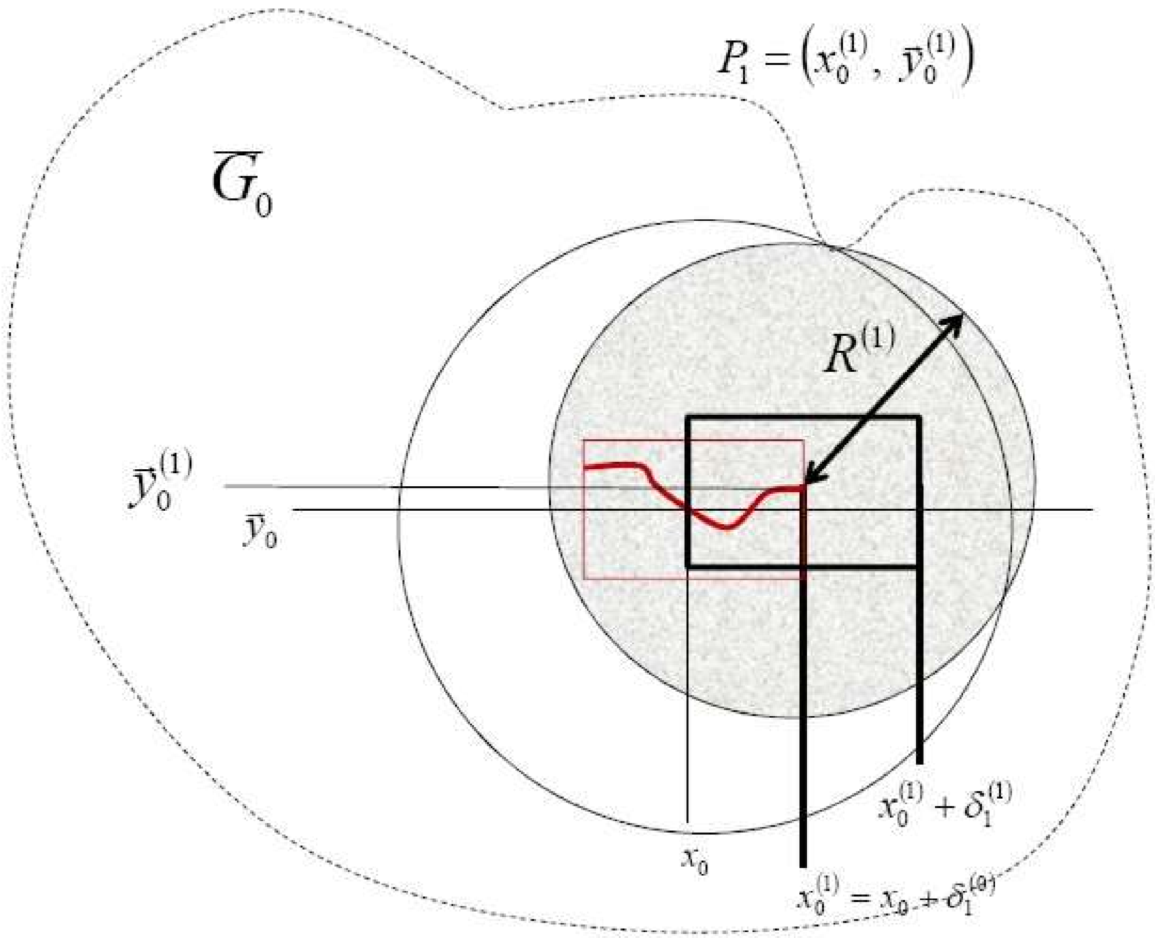


❷ $\exists M = const > 0$: $\big\|\vec{f}(x,\vec{y})\big\| \le M$ $\forall (x,\vec{y}) \in \bar{G}_0$ (G_0 - замкнутая ограниченная).

❸ По **лемме 1** (лекция 14) $\vec{f}(x,\vec{y}) \in Lip_{\vec{y}}\left(\overline{U}_{R_0}(P_0)\right)$, т.е. $\exists L = const > 0$[1]: $\|\vec{f}(x,\vec{y}_2) - \vec{f}(x,\vec{y}_1)\| \le L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|$ $\forall(x,\vec{y}_1) \in \overline{U}_{R_0}(P_0)$ и $\forall(x,\vec{y}_2) \in \overline{U}_{R_0}(P_0)$.

❹ По **теореме 1** (существования и единственности) (лекция 15) решение $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_0(x)$, проходящее через точку P_0, существует и единственно на $I^{(0)} = \left[x_0 - \delta_1^{(0)}, x_0 + \delta_1^{(0)}\right] \subset G_0$, где $\delta_1^{(0)} = min\left\{\frac{1}{L+1}, \frac{R^{(0)}}{\sqrt{1+M^2}}\right\}$.

② Положим $x_0^{(1)} = x_0 + \delta_1^{(0)}$, $\vec{y}_0^{(1)} = \vec{y}(x_0^{(1)})$. И в качестве начальной точки выберем $P_1 = \left(x_0^{(1)}, \vec{y}_0^{(1)}\right)$.



Теперь $R^{(1)} = \rho(P_1, \partial G_0) > 0$, $\delta_1^{(1)} = min\left\{\frac{1}{L+1}, \frac{R^{(1)}}{\sqrt{1+M^2}}\right\}$.

По **теореме 1** (существования и единственности) (лекция 15) решение $\vec{y}(x) = \vec{\phi}_1(x)$, проходящее через точку P_1, существует и единственно на $I^{(1)} = \left[x_0^{(1)} - \delta_1^{(1)}, x_0^{(1)} + \delta_1^{(1)}\right] \subset G_0$.

При этом $\vec{\phi}_0(x) = \vec{\phi}_1(x)$ на $I^{(0)} \cap I^{(1)}$ - промежутке, где оба они определены.

---

[1] По условию $\dfrac{\partial f_i(x,\ \bar{y})}{\partial y_j} \in C\left(\overline{G}_0\right)$, следовательно, $\exists K_{ij} = const > 0$: $\left|\dfrac{\partial f_i(x,\ \bar{y})}{\partial y_j}\right| \le K_{ij}$ для $\forall\left(x,\ \bar{y}\right) \in \overline{G}_0$, $L_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{\ 2}}$ и $L = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^{\ 2}}$ обеспечит постоянную Липшица одну и ту же в любой выпуклой подобласти $\overline{G}_0$.

И на $\left[x_0, x_0^{(1)}+\delta_1^{(1)}\right]$ получаем решение (1) $\vec{y}(x) = \begin{cases} \vec{\phi}_0(x), & x \in \left[x_0, x_0+\delta_1^{(0)}\right] = \left[x_0, x_0^{(1)}\right] \\ \vec{\phi}_1(x), & x \in \left[x_0^{(1)}, x_0^{(1)}+\delta_1^{(1)}\right]. \end{cases}$

Пусть теперь $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + \delta_1^{(1)}$, $\vec{y}_0^{(2)} = \vec{y}\left(x_0^{(2)}\right)$. $P_2 = \left(x_0^{(2)}, \vec{y}_0^{(2)}\right) \in G_0$ - новая начальная точка. Рассуждая аналогичным образом, продолжим решение на $\left[x_0, x_0^{(2)}+\delta_1^{(2)}\right]$.

③ Продолжаем процесс далее.

При этом каждый раз $R^{(k)} = \rho(P_k, \partial G_0) > 0$, $\delta_1^{(k)} = min\left\{\frac{1}{L+1}, \frac{R^{(k)}}{\sqrt{1+M^2}}\right\}$.

❶ Возможны два случая:

1) либо за конечное число шагов решение будет продолжено до точки $P_N \in \partial G_0$, что и требовалось,

2) либо будет построена последовательность точек $P_k = \left(x_0^{(k)}, \vec{y}_0^{(k)}\right)$, $k \in \mathrm{N}$: $x_0^{(k)} = x_0^{(k-1)} + \delta_1^{(k-1)}$. $\vec{y}_0^{(k)} = \vec{y}\left(x_0^{(k)}\right)$.

❷ Последовательность $\left\{x_0^{(k)}\right\}_1^{\infty}$ монотонно возрастает и ограничена (по построению $x_0^{(k)} \in G_0$, а G_0 - замкнутая ограниченная по условию), следовательно $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_0^{(k)} = b$.

❸ Решение (1) $\vec{y}(x)$ продолжалось на каждый отрезок $\left[x_0^{(k)}, x_0^{(k)}+\delta_1^{(k)}\right]$, следовательно оно продолжено на $[x_0, b)$.

④ По **лемме 2** и **лемме 4** (лекция 14) $\forall x_1, x_2 \in [x_0, b)$ верно неравенство $\|\vec{y}(x_1) - \vec{y}(x_2)\| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} \left\|\vec{f}\left(\xi, \vec{y}(\xi)\right)\right\| d\xi\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} M d\xi\right| \leq M|x_2 - x_1|$.

Т.е., $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$: $\forall x_1, x_2 \in (b-\delta, b) \Rightarrow \|\vec{y}(x_1) - \vec{y}(x_2)\| \leq \varepsilon$.

Согласно критерию Коши, $\exists \lim\limits_{x\to b-0} \vec{y}(x) = \vec{y}^*$.

Для непрерывности $\vec{y}(x)$ на отрезке $[x_0, b]$полагаем $\vec{y}(b) = \vec{y}^*$, $P^* = (b, \vec{y}^*)$.

Тогда $P^* = (b, \vec{y}^*) = \left(b, \vec{y}(b)\right)$. И $P_k \xrightarrow[k\to\infty]{} P^*$.

⑤ Осталось показать, что 1 $P^* \in \partial G_0$ и 2 существует $y_i'(b-0)$, $i = \overline{1,n}$.

1 Докажем от противного.

Итак, $x_0^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} b$.

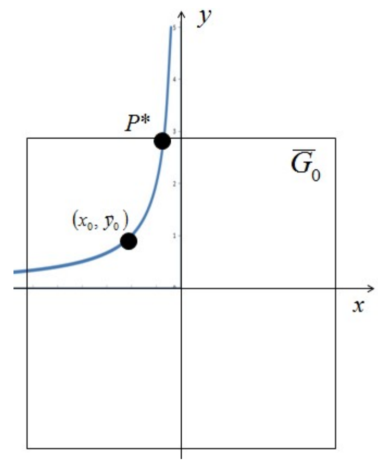
По построению $x_0^{(k)} = x_0 + \delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} + \cdots + \delta_1^{(k-1)}$, следовательно, ряд $\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(1)} + \cdots + \delta_1^{(k)} + \cdots$ сходится. В силу необходимого условия сходимости (следствие критерия Коши) $\delta_1^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Так как $\delta_1^{(k)} = min\left\{\frac{1}{L+1}, \frac{R^{(k)}}{\sqrt{1+M^2}}\right\}$, а $\frac{1}{L+1} = const \underset{k\to\infty}{-/\to} 0$, то, начиная с некоторого K, т.е. $\forall k > K$, $\delta_1^{(k)} = \frac{R^{(k)}}{\sqrt{1+M^2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, т.е. $R^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Пусть $P^* \notin \partial G_0$. Тогда найдется $\varepsilon^* > 0$: $\rho(P^*, \partial G_0) = 2\varepsilon^* > 0$. Но $P_k \xrightarrow[k\to\infty]{} P^*$, т.е. $\exists \hat{K}: \forall k > \hat{K} \Rightarrow P_k \in U_{\varepsilon^*}(P^*)$, и, следовательно, $R^{(k)} = \rho(P_k, \partial G_0) > \varepsilon^*$, что противоречит $R^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Следовательно, наше предположение неверно и $P^* \in \partial G_0$.

2 Получили $\vec{y}(x)$ решение (1) при $x \in [x_0, b)$. По **лемме 2** (лекция 14)
$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi)) d\xi,$ (3)
$\forall x \in [x_0, b)$.
Переходя к пределу в обеих частях (3), получаем $\vec{y}(b) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{b} \vec{f}\big(\xi, \vec{y}(\xi)\big) d\xi$, т.е. (3) верно $\forall x \in [x_0, b]$. Тогда по лемме об интегральном представлении $\vec{y}(x)$ имеет при $x = b$ левую производную $y_i^{'}(b-0) = \vec{f}\big(b, \vec{y}(b)\big)$, $i = \overline{1,n}$. То есть $\forall x \in [x_0, b]$ удовлетворяет уравнению (1).
⑥ Решение (1)-(2) продолжимо влево при $x < x_0$ аналогичным образом.
●

Пример 1. $\begin{cases} y^{'} = y^2, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$ $y(1) = ?$



☐ Решение: $y = 0$ и $y = \frac{-1}{x+C}$.
$G_n = [-n, n] \times [-n, n]$.
Решение задачи Коши $y = -\frac{1}{x}$ продолжимо вправо на $[-1, 0)$.

$\forall x \in (-\infty, 0)$ решение $y = -\frac{1}{x}$ непродолжаемое (максимально продолженное). ■

Замечание. Решение (1) может быть непродолжимо вправо, если
- $\nexists \lim\limits_{x \to b-0} \vec{y}(x)$.
- $\lim\limits_{x \to b-0} \vec{y}(x) = \pm\infty$.
- $(b, \vec{y}^*) \notin D(f)$.

Лемма 5.1 (Гронуолла о дифференциальном неравенстве).
Пусть скалярная функция $\phi(x) \in C(I)$: $\phi(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.
$\exists A = const > 0$ и $\exists B = const > 0$: $\forall x, x_0 \in I$ выполнено $\phi(x) \leq A + B\left|\int_{x_0}^{x} \phi(\xi) d\xi\right|$.
Тогда $\forall x \in I$ $\phi(x) \leq Ae^{B|x-x_0|}$.
○ Пусть для определенности $x > x_0$ (случай $x < x_0$ сводится к рассматриваемому заменой x на $-x$).
Положим $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \phi(\xi) d\xi$. Тогда 1) $\Phi(x_0) = 0$,
2) $\Phi(x) \geq 0$,
3) $\Phi^{'}(x) = \phi(x)$.
Т.е., $0 \leq \Phi^{'}(x) \leq A + B\Phi(x)$. Из чего следует, что
$\Phi^{'}(x) - B\Phi(x) \leq A.$ (4)
Умножим последнее неравенство на $e^{-B|x-x_0|}$: $e^{-B|x-x_0|}\Phi^{'}(x) - Be^{-B|x-x_0|}\Phi(x) \leq Ae^{-B|x-x_0|}$.
Замечая, что $e^{-B|x-x_0|}\Phi^{'}(x) - Be^{-B|x-x_0|}\Phi(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-B|x-x_0|}\Phi(x)\right)$, получим

$\frac{d}{dx}\left(e^{-B|x-x_0|}\Phi(x)\right) \le Ae^{-B|x-x_0|}$.

Проинтегрируем его от x_0 до x: $\left(e^{-B|\xi-x_0|}\Phi(x)\right)\Big|_{x_0}^{x} \le \int_{x_0}^{x} Ae^{-B|\xi-x_0|}d\xi$.

Получим (с учетом $\Phi(x_0) = 0$): $e^{-B|x-x_0|}\Phi(x) \le -\frac{A}{B}e^{-B|\xi-x_0|}\Big|_{x_0}^{x} = -\frac{A}{B}\left(e^{-B|x-x_0|} - 1\right)$.

Следовательно, $\Phi(x) \le \frac{A}{B}\left(1 - e^{-B|x-x_0|}\right)e^{B|x-x_0|} = \frac{A}{B}\left(e^{B|x-x_0|} - 1\right)$.

С другой стороны (4) можно переписать в виде: $\frac{\phi(x)-A}{B} \le \Phi(x)$, откуда $\frac{\phi(x)-A}{B} \le \frac{A}{B}\left(e^{B|x-x_0|} - 1\right)$ или $\phi(x) - A \le A\left(e^{B|x-x_0|} - 1\right)$, т.е. $\phi(x) \le Ae^{B|x-x_0|}$, ч.т.д.●