Гл. VI. Исследование задачи Коши.

Задача Коши

$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\vec{y}),$ (1)

$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ (2)

При этом $x \in I \subset R^1_x$ - независимое переменное,

$I \in \{(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]\}$,

$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} : I \to D \subset R^n_{\vec{y}} \qquad \forall x \in I, \quad y_i(x) \in C^1(I),\ i = \overline{1,n},$

$G = I \times D \subset R^{n+1}_{x,\vec{y}},$

$\vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\vec{y}) \end{pmatrix}, \qquad f_i(x,\vec{y}) \in C(G),\ i = \overline{1,n}.$

Теорема 1 (лекция 15) гарантирует существование единственного решения ЗК (1)-(2) лишь в малой $U_{\delta_1}(x_0)$ - δ_1-окрестности т. x_0: $U_{\delta_1}(x_0) = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, где $\delta_1 = min\left\{\frac{1}{L+1}, \frac{R}{\sqrt{1+M^2}}\right\}$.

§5. О продолжимости решений.

Теорема 5.2 (о продолжении решения на весь заданный интервал).

Пусть $G = \{\alpha < x < \beta, \vec{y} \in R^n\}$ (допускаются случаи $\alpha = -\infty$ и/или $\beta = +\infty$).

Пусть $\vec{f}(x,\vec{y}) \in C(G), \frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(G)\ \ \forall i,j = \overline{1,n},$

и $\exists a(x) \in C\big((\alpha,\beta)\big),\ \exists b(x) \in C\big((\alpha,\beta)\big)$: $a(x) \geq 0\ \ \forall x \in (\alpha,\beta)$ и $b(x) \geq 0\ \ \forall x \in (\alpha,\beta)$;

и $\left\|\vec{f}(x,\vec{y})\right\| \leq a(x)\|\vec{y}\| + b(x)$.

Тогда любое решение уравнения

$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\vec{y}),$ (1)

проходящее в G, можно продолжить на весь интервал (α,β).

○ ❶Выберем $\alpha_1 \in (\alpha,\beta)$ и $\beta_1 \in (\alpha,\beta)$ произвольным образом, но так, чтобы $\alpha_1 < \beta_1$. И рассмотрим отрезок $[\alpha_1,\beta_1]$.

Пусть $x_0 \in [\alpha_1,\beta_1]$ - любое, а $\vec{y}(x)$ - решение (1), проходящее через точку с $x = x_0$. Обозначим $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. $\vec{y}_0$ - любое, но точка $(x_0,\vec{y}_0) \in G$.

На $[\alpha_1,\beta_1]$ $\exists A = const > 0$: $a(x) \leq A\ \forall x \in [\alpha_1,\beta_1]$ и

$\exists B = const > 0$: $b(x) \leq B\ \forall x \in [\alpha_1,\beta_1]$.

По **лемме 2** (лекция 14) $\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}\big(\xi,\vec{y}(\xi)\big)d\xi$ для $\forall x \in (\alpha,\beta)$, а следовательно и для $\forall x \in [\alpha_1,\beta_1]$.

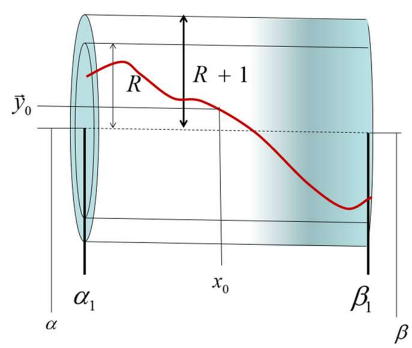
$\|\vec{y}(x)\| = \left\|\vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi))d\xi\right\| \leq$ (**лемма 4** (лекция 14)) $\leq \|\vec{y}_0\| + \left|\int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi))\| d\xi\right| \leq$ (по условию) $\leq \|\vec{y}_0\| + \left|\int_{x_0}^{x} (a(x)\|\vec{y}\| + b(x))d\xi\right| = \|\vec{y}_0\| + \left|\int_{x_0}^{x} a(x)\|\vec{y}\|d\xi + \int_{x_0}^{x} b(x)d\xi\right| \leq$ (неравенство треугольника) $\leq \|\vec{y}_0\| + \left|\int_{x_0}^{x} a(x)\|\vec{y}\|d\xi\right| + \left|\int_{x_0}^{x} b(x)d\xi\right| \leq \|\vec{y}_0\| + A\left|\int_{x_0}^{x} \|\vec{y}\|d\xi\right| + B\left|\int_{x_0}^{x} d\xi\right| \leq \|\vec{y}_0\| + B|x - x_0| + A\left|\int_{x_0}^{x} \|\vec{y}\|d\xi\right| \leq \|\vec{y}_0\| + B|\alpha_1 - \beta_1| + A\left|\int_{x_0}^{x} \|\vec{y}\|d\xi\right| = \tilde{A} + \tilde{B}\left|\int_{x_0}^{x} \|\vec{y}\|d\xi\right|$, где $\tilde{A} = \|\vec{y}_0\| + B(\beta_1 - \alpha_1)$, $\tilde{B} = A$.

По **лемме 5.1** (Гронуолла) при $\phi(x) = \|\vec{y}\|$ получаем, что $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \tilde{A}e^{\tilde{B}|x-x_0|} \leq \tilde{A}e^{\tilde{B}(\beta_1-\alpha_1)} = R\ \forall x \in [\alpha_1, \beta_1]$.

❷ Пусть теперь $G_0 = \{(x,\vec{y}) \in G: x \in [\alpha_1,\beta_1], \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq R + 1\}$.

По **теореме 5.1** (о продолжении решения в замкнутой ограниченной области) решение $\vec{y}(x)$ продолжимо вплоть до выхода его графика на границу цилиндра G_0.

❸ Но график решения в силу его ограниченности не может выйти на боковую поверхность цилиндра, поэтому решение выходит на границу G_0 лишь на торцах цилиндра, т.е. при $x = \alpha_1$ и $x = \beta_1$.



❹ Так как решение определено на любом отрезке $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$, то оно определено на всем (α, β).

●

Пример 2. Доказать, что задача Коши $\begin{cases} y' = y + 2 + \sin y\,, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ имеет решение на всем R.

□ $f(x,y) = y + 2 + \sin y \in C(R^2)$, $f'_y(x,y) = 1 + \cos y \in C(R^2)$,
$\exists a(x) = 1 \in C(R)$, $\exists b(x) = 3 \in C(R)$: $a(x) \geq 0\ \forall x \in R$ и $b(x) \geq 0\ \forall x \in R$.
Все условия **теоремы 5.2** (о продолжении решения на весь заданный интервал) выполнены , поэтому решение поставленной задачи Коши продолжимо на всю R.
■

§6. Зависимость ЗК от параметров и начальных данных.

Введем в рассмотрение параметр $\vec{\mu} \in M$, где $M \in R^m$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu}), & (4) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0(\vec{\mu}). & (5) \end{cases}$$

Будем считать, что при любом фиксированном значении параметра $\vec{\mu}$ функция $\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu})$ удовлетворяет условиям **теоремы 1** (существования и единственности) (лекция 15), т.е. решение задачи (4), (5) существует в некоторой окрестности точки $\left(x_0, \vec{y}_0(\vec{\mu})\right)$, единственно и продолжено, насколько это возможно.

Теорема 6.1 Пусть $\forall\vec{\mu} \in M$, $\forall(x,\vec{y}) \in G$

① $\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu}) \in C(G \times M)$, $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j} \in C(G \times M)$ $\forall i,j = \overline{1,n}$,

② $\vec{y}_0(\vec{\mu}) \in C(M)$,

③$\vec{\mu}_0 \in M$ и $\left(x_0, \vec{y}_0(\vec{\mu}_0)\right) \in G$.

Тогда $\exists\delta > 0$ и $\exists\alpha > 0$:

решение задачи Коши (4) - (5) $\vec{y} = \vec{\phi}(x,\vec{\mu})$ непрерывно на множестве $Q = \{|x - x_0| \le \delta, |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \le \alpha\}$.

Теорема 6.2 (дифференцируемость по параметру).

1. Пусть $\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu})$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}$ $\forall i,j = \overline{1,n}$, $\forall k = \overline{1,m}$ непрерывны $\forall(x,\vec{y}) \in G$ и $\forall\vec{\mu} \in M$.
2. Пусть $\vec{y}_0(\vec{\mu}) \in C^1(M)$.
3. Пусть $\vec{\mu}_0 \in M$, $\left(x_0, \vec{y}_0(\vec{\mu}_0)\right) \in G$.

Тогда $\exists\delta > 0$ и $\exists\alpha > 0$ такие, что при $|x - x_0| \le \delta$, $|\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \le \alpha$ решение $\vec{y} = \vec{\phi}(x,\vec{\mu})$ задачи Коши (4), (5) непрерывно дифференцируемо по μ_k, $k = \overline{1,m}$.

Производные $u_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial \mu_k}$ удовлетворяют системе уравнений ***в вариациях***

$$\frac{du_{ik}}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} u_{jk}, \quad (6)$$

и начальному условию

$$u_{ik}(x_0) = \frac{\partial y_{0_i}}{\partial \mu_k}, \quad (7)$$

где $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$, производные $\frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ берутся в точках $\left(x, \vec{\phi}(x,\vec{\mu}), \vec{\mu}\right)$

Доказательство теорем в конце семестра**.**

Замечание 1. Если $\vec{y}_0 = \vec{\mu}$, а правая часть (4) не зависит от параметра (дифференцируемость по начальным данным), то (6), (7) принимает вид

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} u_{jk}, \quad (8)$$

$$u_{ik}(x_0)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$
(9)

Замечание 2. Систему (6), (7) можно не запоминать - она получается из (4), (5) посредством ее дифференцирования по параметру $\vec{\mu}$.

Замечание 3. В системе (6), (7) производные $\frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}, \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $\forall i,j=\overline{1,n},\ \forall k=\overline{1,m}$ зависят от $x, y_1(x,\mu_1,\dots,\mu_m),\dots,y_n(x,\mu_1,\dots,\mu_m), \mu_1,\dots,\mu_m$, где $y_j(x,\mu_1,\dots,\mu_m), j=\overline{1,n}$ - координаты $\vec{y}=\vec{\phi}(x,\vec{\mu})$ при том значении $\vec{\mu}$, при котором ищется $\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{\mu}}$.

Пример 3. $\begin{cases}y'=y+y^2+xy^3,\\ y(2)=y_0.\end{cases}$ Найти $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$[1].

□ Обозначим для удобства применения **теоремы 6.2** (дифференцируемость по параметру) $\mu=y_0$. Тогда для решения задачи Коши $\begin{cases}y'=y+y^2+xy^3,\\ y(2)=\mu\end{cases}$ надо найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

$f(x,y,\mu)=y+y^2+xy^3, \frac{\partial f}{\partial y}=1+2y+3xy^2, \frac{\partial f}{\partial \mu}=0$ - непрерывны; $x_0=2$;

$u=\frac{\partial y}{\partial \mu}$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \mu}+\frac{\partial f}{\partial y}u=(1+2y+3xy^2)u \qquad \text{(ув)}$$

и начальному условию

$u(2)=\frac{\partial y_0}{\partial \mu}=1.$

Причем в (ув) y решение исходной задачи при $\mu=0$, то есть

$$\begin{cases}y'=y+y^2+xy^3,\\ y(2)=0.\end{cases}$$
(ЗК0)

Нетрудно заметить, что $y=0$ является решением (ЗК0).

В силу непрерывности $f(x,y,\mu)=y+y^2+xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1+2y+3xy^2$ согласно **теореме 1** (существования и единственности) (лекция 15) решение (ЗК0) единственно.

Т.о., $\begin{cases}u'=u,\\ u(2)=1,\end{cases}$ т.е. $u(x)=Ce^x$, где $Ce^2=1$.

И $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}=e^{x-2}$.■

§7. ЗК для ОДУ 1-го порядка не разрешенного относительно производной.

Замечание. См. лекцию 6.

Общий вид ОДУ 1[го] порядка

$$F(x,y,y')=0 \qquad (7.1)$$

---
[1] Ф 1066

Определение. Решением ОДУ (1) на промежутке I называется функция $y = \phi(x)$, заданная на I, если

- $\phi(x) \in C^1(I)$,
- $\forall x \in I$ точка $\left(x, \phi(x), \phi'(x)\right) \in \Omega \subset D(F)$,
- $F\left(x, \phi(x), \phi'(x)\right) \equiv 0 \ \forall x \in I$.

Пример 7.1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$.

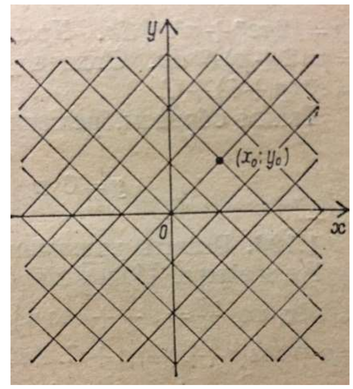
□ Это ОДУ 1-го порядка 2-ой степени.

$\frac{dy}{dx} = 1,$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dx} = -1.$

$y = x + c,$ $\qquad\qquad$ $y = -x + c$

т. (x_0, y_0):

$y = x + (y_0 - x_0),$ $\qquad\qquad$ $y = -x + (y_0 + x_0)$ ■



В каждой точке $(x_0, y_0) \in G = I \times D \subset R^2$ в зависимости от количества корней y_1 уравнения

$F(x, y, y_1) = 0$ $\qquad$ (7.2)

уравнение (7.1) может задавать несколько значений поля направлений.

Поэтому ***задача Коши*** ставится следующим образом

Найти решение ОДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям (НУ)

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$ $\qquad$ (7.3)

где тройка чисел x_0, y_0, y_1 связана соотношением (7.2).

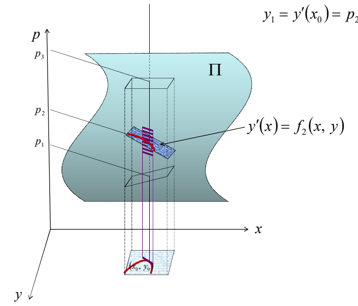
Определение. (7.1), (7.2), (7.3) - ***расширенная задача Коши*** (РЗК).

Замечание 1. В случае однозначности поля направлений

$$y'(x_0) = y_1 = f(x_0, y_0)$$

выполняется автоматически для любого решения (7.1), поэтому его задание излишне.

Замечание 2. В общем случае (неоднозначности поля направлений) для того, чтобы выделить единственное решение (7.1), проходящее через точку $(x_0, y_0) \in G$, вообще говоря, надо задавать не только саму точку, но и значение $y'(x_0) = y_1$. Причем не произвольно, а так, чтобы тройка чисел x_0, y_0, y_1 удовлетворяла соотношению (7.2).



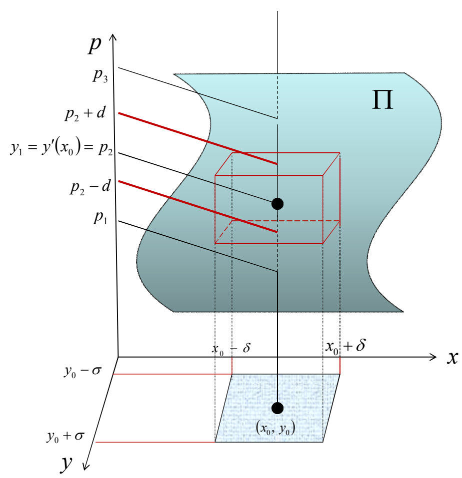
Т.е. точка $(x_0, y_0, y_1) \in \Pi \subset R^3$ - поверхности, задаваемой уравнением
$F(x, y, p) = 0$. (7.2П)

Теорема 7.1 Если

- $F(x, y, p)$, $F'_x(x, y, p)$, $F'_y(x, y, p)$ и $F'_p(x, y, p)$ непрерывны $\forall (x, y, p) \in \Omega$,
- $(x_0, y_0, y_1) \in \Omega$, $F(x_0, y_0, y_1) = 0$,
- $F'_p(x_0, y_0, y_1) \neq 0$,

то в некоторой $U_\delta(x_0)$ существует единственное решение расширенной задачи Коши (7.1), (7.2), (7.3).

□ Так как $F'_p(x_0, y_0, y_1) \neq 0$, то по теореме о неявной функции найдется такая окрестность точки $(x_0, y_0, y_1) \in \Omega$, что $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$, $y' = p \in [y_1 - d, y_1 + d]$ $([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \times [y_1 - d, y_1 + d] \subset \Omega)$, в которой уравнение (7.2П) имеет единственное решение вида $p = f(x, y)$.



Причем $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$ и $y_1 = f(x_0, y_0)$.

При этом $f(x, y) \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma])$ и $f'_y(x, y) \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma])$.

Тогда по **теореме 1** (существования и единственности) (лекция 15) ОДУ $y' = f(x, y)$ с НУ $y(x_0) = y_0$ имеет единственное решение $\forall x \in \big[x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}\big]$, где $\tilde{\delta} \leq \delta$.

Это решение удовлетворяет ОДУ (7.1) и условиям (7.2), (7.3). Т.о., оно является решением расширенной задачи Коши. ■

Следствие 7.1 Пусть $F(x, y, p)$, $F'_x(x, y, p)$, $F'_y(x, y, p)$ и $F'_p(x, y, p)$ непрерывны $\forall (x, y, p) \in \Omega$.

Пусть в т. $(x_0, y_0) \in G \subset \Omega$ уравнение $F(x_0, y_0, p) = 0$ имеет ровно m различных корней p_i, $i = \overline{1, m}$

и для каждого из них $\left.\frac{\partial F(x_0, y_0, p)}{\partial p}\right|_{p = p_i} \neq 0$.

тогда через точку (x_0, y_0) в ее окрестности проходит ровно m решений ОДУ (7.1), и в этой точке все их производные $y'(x_0) = p_i$, $i = \overline{1, m}$ различны.

Вспоминая лекцию 5:

т. $(x_0, y_0, y_1) \in \Omega$ - ОСОБАЯ ТОЧКА = ТОЧКА НЕЕДИНСТВЕННОСТИ, если некоторые два решения (может быть и больше), проходящие через нее[2], локально[3] различны[4];

ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ - решение состоящее из особых точек.

Т.е. особое решение это решение ОДУ (7.1), в каждой точке которого нарушается единственность.

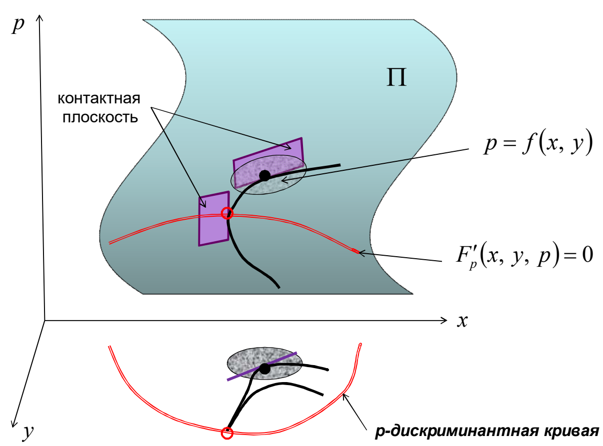
Напомним

Определение. Геометрическое место точек $(x, y) \in G \subset R^2_{x,y}$, для которых система

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

разрешима, называется ***p-дискриминантным множеством***.

Определение. ***p-дискриминантная кривая*** - кривая, лежащая в p-дискриминантном множестве.



p-дискриминантная кривая не обязана быть решением, однако любое особое решение содержится в p-дискриминантном множестве (см. лекция 6 **утверждение 2**).

Поэтому для каждой p-дискриминантную кривую надо проверить

1. является ли она решением,
2. касаются ли ее в этом случае другие решения в каждой точке.

Условия касания: кривые $y = \phi(x)$ и $y = \psi(x)$ касаются друг друга в некоторой точке x^*, если

- $\phi(x^*) = \psi(x^*)$,
- $\phi'(x^*) = \psi'(x^*)$

Определение. Кривая γ называется огибающей однопараметрического семейства кривых

$\Phi(x, y, C) = 0,$ (7.4)

если

- в каждой своей точке она касается одной из кривых семейства,
- в разных точках она касается разных кривых.

---

[2] т.е. удовлетворяющие условиям (7.2), (7.3).

[3] вблизи x_0

[4] т.е. не являются локально совпадающими.

Огибающая является решением, причем особым - см. Федорюк.

Огибающая может быть найдена путем исключения параметра C из соотношений $\Phi(x,y,C) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C) = 0$ - необходимое условие: полученная кривая может не быть огибающей, поэтому опять актуальна проверка касания.

Пример 7.1. $(y')^2 - xy' + y = 0.$

☐ Это ОДУ 1-го порядка 2-ой степени.

① Используем метод введения параметра (см. лекцию 5):

$$\begin{cases} F(x,y,p) = p^2 - xp + y = 0, \\ dy = pdx. \end{cases}$$

Отметим, что $y = xp - p^2$.

$p = p + xp' - 2pp' \rightarrow (x - 2p)p' = 0.$

Возможны два случая

а) $p' = 0 \rightarrow p = C \rightarrow y = xC - C^2$;

б) $p = \frac{x}{2} \rightarrow y = x\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$

② Особые решения?

❶ Кандидаты в особые решения находим из системы $\begin{cases} F(x,y,p) = 0, \\ F'_p(x,y,p) = 0, \end{cases}$ т.е.

$\begin{cases} p^2 - xp + y = 0, \\ 2p - x = 0. \end{cases}$ При $p = \frac{x}{2}$ получаем, что $y = \frac{x^2}{4}$ - p-дискриминантная кривая, являющаяся решением.

Проверка касания: $\begin{cases} \frac{(x^*)^2}{4} = x^*\hat{C} - \hat{C}^2, \\ \frac{x^*}{2} = \hat{C} \end{cases}$ показала, что $y = \frac{x^2}{4}$ - особое решение.

❷ Кандидаты в особые решения находим из системы $\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \Phi'_C(x,y,C) = 0, \end{cases}$ т.е.

$\begin{cases} y - xC + C^2 = 0, \\ -x + 2C = 0. \end{cases}$ При $C = \frac{x}{2}$ получаем, что $y = \frac{x^2}{4}$ - огибающая, являющаяся решением.

Проверка касания аналогична.■