Лекция 19 (4).

# Гл. VII. Линейные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

## *§2. Линейные однородные уравнения 2-го порядка.*

Будем рассматривать уравнения вида:
$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0,$
(2.1)
$a(x), b(x), c(x) \in C(I), a(x) \neq 0\ \forall x \in I.$

Так как $a(x) \neq 0$, то (2.1) можно записать в виде:
$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = 0, \quad (2.2)$$
где $A(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $B(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$.
**Задача:** привести (2.1) (или (2.2)) к виду, не содержащему $y'(x)$:
$$z''(x) + Q(x)z(x) = 0. \quad (2.3)$$

**I способ.** С помощью замены **независимого** переменного.
① Приводим (2.1) к ***дивергентной форме***:
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) + q(x)y(x) = 0. \quad (2.4)$$
Для этого запишем (2.4) в развернутом виде
$py'' + p'y' + qy = 0.$
Умножим исходное уравнение (2.1) на некоторую функцию $\mu(x)$:
$\mu a y'' + \mu b y' + \mu c y = 0.$
И подберем $\mu(x)$ так, чтобы $\mu a = p, \mu b = p'$:
$$\mu' a + \mu a' = \mu b$$
или
$\mu' a + \mu(a' - b) = 0$ - уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{b-a'}{a}dx.$

Интегрируя, получаем $ln|\mu| = \int \frac{b}{a}dx - \int \frac{a'}{a}dx$, т.е. $\mu a = Ce^{\int \frac{b}{a}dx}$.

$\mu = \frac{1}{a}e^{\int \frac{b}{a}dx}$ - нашли с точностью до произвольной постоянной.
Получили $p(x) \in C(I), q(x) \in C(I)$ при $a(x) \neq 0\ \forall x \in I.$
При $a(x) > 0\ \forall x \in I$ получаем $\mu(x) > 0$.

② Вводим новое независимое переменное $\xi$: $d\xi = \frac{dx}{p(x)}$, $p = \mu a = e^{\int \frac{b}{a}dx}$.

Т.о., $\xi = \int \frac{dx}{p(x)} = \int e^{-\int \frac{b}{a}dx}dx.$

Так как $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p(x)} > 0$, то $x = x(\xi)$ - непрерывно дифференцируема,
и по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{u_\xi}{p(x(\xi))}$.

Т.о. $p\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}$.
Тогда (2.4) принимает вид
$$\frac{1}{p}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right) + qy = 0$$
или
$\frac{d^2y}{d\xi^2} + Qy = 0,$
где $Q = pq = (a \cdot \mu) \cdot (c \cdot \mu) = \frac{c}{a}e^{2\int\frac{b}{a}dx}$.
$\boxed{+}$ Если $a(x) > 0\ \forall x \in I$, то знак $Q$ совпадает со знаком $c(x)$.
$\boxed{-}$ Трудно определима обратная замена.

**II способ.** С помощью замены искомой функции (**зависимого** переменного).

Введем новую искомую функцию $z(x)$:
$$y(x) = u(x) \cdot z(x)$$
и подберем $u(x)$ так, чтобы в преобразованном уравнении коэффициент при $z'(x)$ обратился в нуль:
$y' = u' \cdot z + u \cdot z',\ y'' = u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z''$.
Из (2.2) получаем
$$u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z'' + A(u' \cdot z + u \cdot z') + Buz = 0$$
или
$u \cdot z'' + (2u' + Au) \cdot z' + (u'' + Au' + Bu) \cdot z = 0.$
Хотим, чтобы $2u' + Au = 0$, т.е. $\frac{du}{u} = -\frac{A}{2}dx$ и $u = C\,exp\left\{-\frac{1}{2}\int A(x)dx\right\}$.
Так как нам подойдет любое решение, то полагаем $C = 1$.
Имеем $u' = -\frac{A}{2}u$, $u'' = -\frac{A'}{2}u - \frac{A}{2}u' = -\frac{A'}{2}u + \frac{A^2}{4}u$ и $u'' + Au' + Bu = \left(-\frac{A'}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{2} + B\right)u$.
Так как $u = exp\left\{-\frac{1}{2}\int A(x)dx\right\} > 0$, то ОДУ (2.2) принимает вид
$z'' + \left(-\frac{A'}{2} - \frac{A^2}{4} + B\right) \cdot z = 0.$ (2.4)
При этом
$Q(x) = -\frac{1}{2}A'(x) - \frac{1}{4}A^2(x) + B(x).$ (2.6)
не зависит от выбора функции $u(x)$, т.е. является инвариантом ОДУ (2.2).

**Замечание 1**. Здесь полагаем $A(x) \in C^1(I)$, $B(x) \in C(I)$.

**Замечание 2**. Так как $Q(x)$ - инвариант, т.е. не изменяет своей величины при всех подстановках вида $y(x) = u(x) \cdot z(x)$, то все ОДУ, в которых искомые функции отличаются только множителем $u(x)$ приводятся к одному и тому же виду.

**Замечание 3**. равенство инвариантов двух ОДУ 2-го порядка есть необходимое и достаточное условие того, что одно из них могло бы быть преобразовано в другое подстановкой вида $y(x) = u(x) \cdot z(x)$.

**Замечание 4**. Нули $y(x)$ $z(x)$ совпадают на $I$: $y(x) = u(x) \cdot z(x) = z(x)e^{-\frac{1}{2}\int A(x)dx}$.

**Пример 1**. Преобразовать к дивергентному виду, сделать замену и решить $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$.

☐ $\mu(x) \cdot x^4 = p(x), \mu(x) \cdot 2x^3 = p'(x) \Rightarrow \mu' x^4 + 4\mu x^3 = 2\mu x^3$.

$\frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow \mu x^2 = 1$, например, и $\mu = \frac{1}{x^2}$.

Исходное ОДУ при умножении на $\mu(x)$ принимает вид: $x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{x^2} y = 0$

или, в дивергентной форме $(x^2 y')' + \frac{1}{x^2} y = 0$.

В уравнении $x^2 \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d}{dx} y\right) + y = 0$ положим $x^2 \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}$. Тогда $d\xi = \frac{dx}{x^2}$.

Замена $\xi = -\frac{1}{x}$ приводит к ОДУ $\tilde{y}_{\xi\xi}(\xi) + \tilde{y}(\xi) = 0$.

Его решение $\tilde{y}(\xi) = C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi$.

Возвращаясь к старым переменным $y(x) = D_1 \cos\left(-\frac{1}{x}\right) + D_2 \sin\left(-\frac{1}{x}\right)$.

■

Далее в процессе исследования нулей и выпуклости графиков решений наряду с (2.2) будем рассматривать (2.3).

**Лемма 2.1**.(о кратности нулей решения (2.2))

> Если $y(x) \equiv/\equiv 0$, $x \in I$ - произвольное ***нетривиальное*** решение (2.2) при $A(x) \in C(I), B(x) \in C(I)$,
> $y(x_0) = 0, x_0 \in I$, то $x_0$ - простой нуль $y(x)$, т.е. $y'(x_0) \neq 0$.

○ Доказательство от противного.

Пусть

$y(x_0) = 0$ и $y'(x_0) = 0$. (a)

$y(x) \equiv 0$ решение задачи Коши (2.2), (a).

По **теореме 1** (существования и единственности) (лекция 15) решений, отличных от тривиального в этом случае нет.

Полученное противоречие доказывает лемму.●

**Лемма 2.2**.(о количестве нулей решения (2.2) на конечном промежутке)

> Всякое нетривиальное решение уравнения (2.2) может на отрезке $I = [a, b]$ иметь не более КОНЕЧНОГО числа нулей.

○ Доказательство от противного.

Пусть $y(x) \equiv/\equiv 0$ - решение (2.2).

И пусть $y(x_k) = 0, x_k \in I, k = 1,2, \ldots$ - нулей $y(x)$ на $I$ бесконечно много.

① По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists\{x_{k_n}\}_1^\infty$ - подпоследовательность последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x^* \in I$.

$y(x) \in C^1(I)$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_{k_n}) = 0$ и $y(x^*) = 0$ по непрерывности.

② По теореме Ролля на интервале $(x_{k_n}, x_{k_{n+1}})$ (или $(x_{k_{n+1}}, x_{k_n})$) найдется точка $\hat{x}_n$ такая, что $y'(\hat{x}_n) = 0$.

Получаем последовательность $\{\hat{x}_n\}_1^\infty$, $\hat{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} y'(\hat{x}_n) = 0$ и $y'(x^*) = 0$ по непрерывности.

Т.е. $\exists x^* \in I$: $y(x^*) = 0$ и $y'(x^*) = 0$, следовательно $x^*$ - двукратный нуль $y(x)$.
По **лемме 2.1** такого быть не может.
Полученное противоречие доказывает лемму.●

**Определение.** Решение ОДУ, имеющее на промежутке $I$ НЕ БОЛЕЕ одного нуля, называется ***неколеблющимся***,
в противном случае (более одного нуля) - ***колеблющимся***.

Рассмотрим (2.3) при $Q(x) = const$.

① $Q(x) = -a^2 = const < 0$

$z''(x) - a^2 z(x) = 0$, т.е. $z''(x) = a^2 z(x) > 0$.

$z(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} = e^{ax}\left(C_1 + \frac{C_2}{e^{2ax}}\right)$.

Это решение на $I$ имеет не более одного нуля: НЕКОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ.

② $Q(x) = 0$

$$z''(x) = 0$$

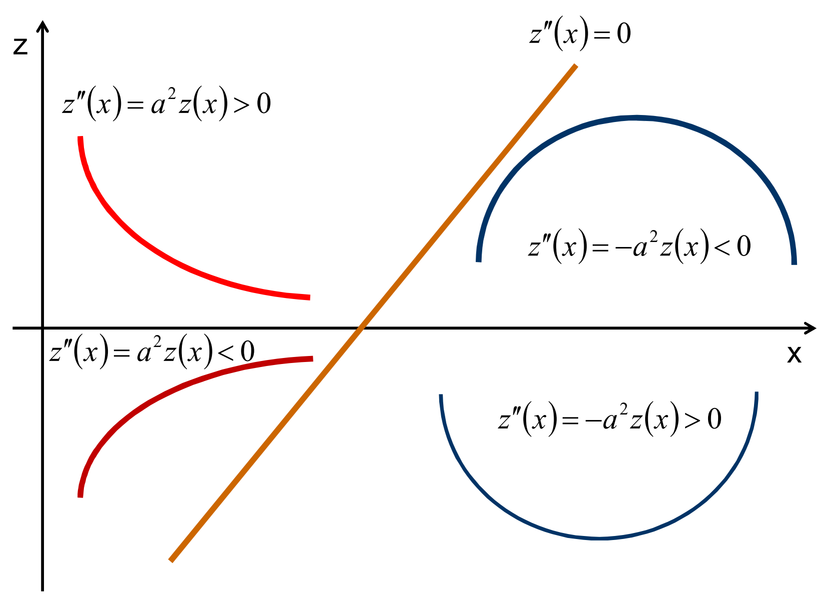
$z(x) = C_1 x + C_2$ - НЕКОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ решение.

③ $Q(x) = a^2 = const > 0$

$z''(x) + a^2 z(x) = 0$, т.е. $z''(x) = a^2 z(x) < 0$.

$z(x) = C_1 \cos a\,x + C_2 \sin a\,x = C_3 \sin(ax + C_4)$, где $C_3 = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2}$, $\frac{C_1}{C_3} = \sin C_4$, $\frac{C_2}{C_3} = \cos C_4$.

Это решение имеет бесконечное число нулей, расстояние между которыми равно $\frac{\pi}{a}$.
Если длина промежутка $I$больше $\frac{2\pi}{a}$, то на $I$ имеется по крайней мере два нуля $z(x)$, и решение КОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ.




**Лемма 2.3**.(о линейной зависимости решений (2.2), нули которых совпадают)

Если $A(x) \in C(I)$, $B(x) \in C(I)$,
$y_1(x) \equiv\!\!\!/\equiv 0$, $y_2(x) \equiv\!\!\!/\equiv 0$, $x \in I$ - нетривиальные решения (2.2) и
$\exists x_0 \in I$: $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, то
$\exists C = const \neq 0$: $y_1(x) = Cy_2(x)$ $\forall x \in I$, т.е. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно зависимы.

○ $W_{y_1y_2}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$

Следовательно $\exists C_1 = const$ и $\exists C_2 = const$ такие, что ${C_1}^2 + {C_2}^2 \neq 0$ и $C_1y_1 + C_2y_2 \equiv 0$ $\forall x \in I$.

$C_1 \neq 0$, т.к. при $C_1 = 0$ получается $C_2y_2 \equiv 0$, но $C_1y_1 + C_2y_2 \equiv 0$, следовательно $C_2 = 0$ - противоречие с $C_1y_1 + C_2y_2 \equiv 0$.

Имеем $y_1 = -\frac{C_2}{C_1}y_2$, ч.т.д.●

**Теорема 2.1** Штурма (сравнения).

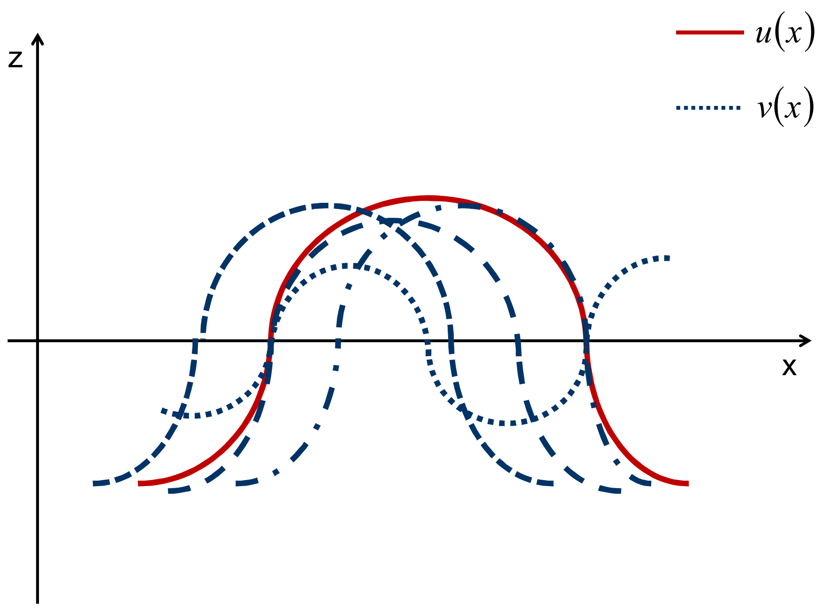
Рассмотрим при $Q_1(x) \in C(I)$, $Q_2(x) \in C(I)$ два ОДУ

$u''(x) + Q_1(x)u(x) = 0,$ (I)

$v''(x) + Q_2(x)v(x) = 0.$ (II)

Если $\forall x \in I$ имеет место $Q_1(x) \leq Q_2(x)$, то

- между двумя соседними нулями любого нетривиального решения $u(x)$ ОДУ (I) лежит по крайней мере один нуль любого решения $v(x)$ ОДУ (II),
- либо $Q_1(x) = Q_2(x)$.




○ Доказательство от противного.

Пусть $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ и $u(x_1) = u(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$, $x_1$ и $x_2$ - соседние нули $u(x)$, т.е. $\forall x \in (x_1, x_2)$ $u(x) > 0$ (случай $u(x) < 0$ рассматривается аналогично или $u(x) := -u(x)$).

И пусть $\forall x \in (x_1, x_2)$ $v(x) \neq 0$. Для определенности $v(x) > 0$ $\forall x \in (x_1, x_2)$.

✹ $(I) \cdot v(x) - (II) \cdot u(x)$: $u''(x)v(x) - v''(x)u(x) = \big(Q_2(x) - Q_1(x)\big)u(x)v(x) \geq 0.$

$$u''(x)v(x) - v''(x)u(x) = u''(x)v(x) + u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x) - u(x)v''(x) =$$
$$= \left(u'(x)v(x)\right)' - \left(u(x)v'(x)\right)' \geq 0.$$

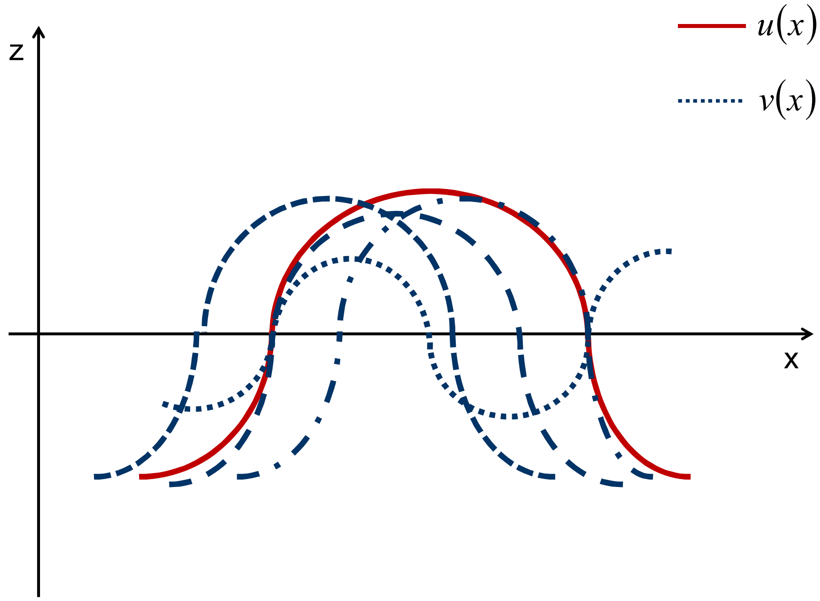
Проинтегрируем $\left(u'(x)v(x)\right)' - \left(u(x)v'(x)\right)' = \left(Q_2(x) - Q_1(x)\right)u(x)v(x) \geq 0$ на $(x_1, x_2)$:

$$\left(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2}\left(Q_2(x) - Q_1(x)\right)u(x)v(x)dx \geq 0.$$

Рассмотрим подробнее левую часть полученного равенства:

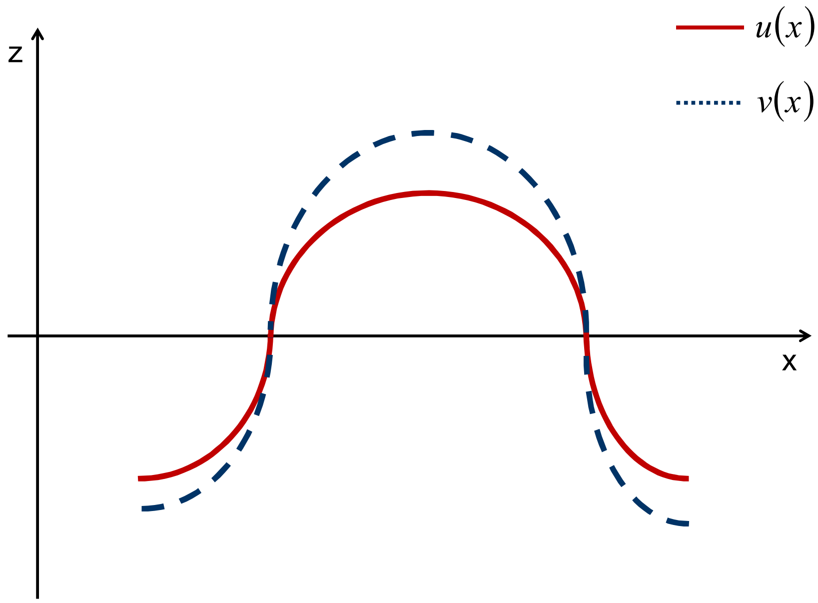
$$\left(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = \left(u'(x)v(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2} - \left(u(x)v'(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2} =$$
$$= \left(u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1)\right) - \left(u(x_2)v'(x_2) - u(x_1)v'(x_1)\right) =$$
$$= \Big| u(x_1) = u(x_2) = 0 \Big| = \left(u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1)\right).$$

Так как $u(x_1) = u(x_2) = 0$, $u(x) > 0\ \forall x \in (x_1, x_2)$, то $u'(x_1) > 0$ и $u'(x_2) < 0$.
Учитывая, что $v(x) > 0\ \forall x \in (x_1, x_2)$ ($v(x_1) \geq 0$ и $v(x_2) \geq 0$), получаем $u'(x_2)v(x_2) \leq 0$, $u'(x_1)v(x_1) \geq 0$ и, следовательно, $\left(u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1)\right) \leq 0$.
Т.о., левая часть неравенства $\leq 0$, правая часть $\geq 0$.
И либо наше предположение было неверным, т.е. $\exists x^* \in (x_1, x_2)$: $v(x^*) = 0$,




либо
$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}\left(Q_2(x) - Q_1(x)\right)u(x)v(x)dx = 0.$$

Так как $x_1$ и $x_2$ простые нули $u(x)$ (**лемма 2.1**), то $v(x_1) = v(x_2) = 0$, а $Q_2(x) - Q_1(x) = 0\ \forall x \in (x_1, x_2)$, т.е. $Q_2(x) \equiv Q_1(x)$ и, следовательно $u(x) = Cv(x)$, $C = const$ (**лемма 2.3**).




●

**Следствие 2.1**. (случай $Q(x) \leq 0$).

Если в ОДУ (2.3) $Q(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, то любое нетривиальное решение $z(x) \equiv/\equiv 0$ (2.3) имеет на $I$ не более одного нуля.

○ Доказательство от противного.

Пусть $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, для определенности $x_1 < x_2$ (всегда можно перенумеровать), и $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Рассмотрим ОДУ $v''(x) = 0$. Здесь $Q_2(x) \equiv 0$, и $Q_2(x) \geq Q_1(x) \equiv Q(x)$.

По **теореме 2.1** Штурма (сравнения) для любого решения $v(x) = C_1 x + C_2$ найдется $x^* \in [x_1, x_2]$: $v(x^*) = 0$.

Но при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ решение $v(x) = 1 \neq 0 \ \forall x \in I$.

Следовательно предположение о наличии более одного нуля у $z(x)$ на $I$ было ошибочно.●

**Следствие 2.2**. (о чередовании нулей).

Нули линейно-независимых решений ОДУ (2.3) перемежаются.

○ ① Пусть $z_1(x)$ и $z_2(x)$ - линейно-независимые решения (2.3).

Если $x_0 \in I$, и $z_1(x_0) = z_2(x_0) = 0$, то по **лемме 2.3** они линейно-зависимы.

Следовательно в случае линейной-независимости $z_1(x)$ и $z_2(x)$ не имеют общих нулей.

② Если $Q(x) \leq 0$, то решение (2.3) неколеблющееся по **следствию 2.1 теоремы 2.1** Штурма (сравнения) и утверждение доказано.

③ Если $Q(x) > 0$ - решения (2.3) суть колеблющиеся.

Пусть $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, для определенности $x_1 < x_2$ (всегда можно перенумеровать), и $z_1(x_1) = z_1(x_2) = 0$ и $z_1(x) \neq 0 \ \forall x \in (x_1, x_2)$.

❶ По **теореме 2.1** Штурма (сравнения) $(Q_1 = Q \le Q = Q_2)$ $\exists x_3 \in (x_1, x_2)$: $z_2(x_3) = 0$[1].
❷ Допустим, что нули НЕ перемежаются, т.е. $\exists x_4 \in (x_1, x_2)$: $x_4 \ne x_3$, и $z_2(x_4) = 0$.
❸ Но тогда $\exists x_5 \in (x_3, x_4)$ (или $\exists x_5 \in (x_4, x_3)$): $z_1(x_5) = 0$, чего быть не может.
❹ Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что нули линейно-независимых решений не перемежаются было ошибочным.●

[1] Теорема 2.1 Штурма (сравнения) утверждает, что $\exists x_3 \in [x_1,\ x_2]$: $z_2(x_3)$, но мы уже исключили случай, когда нули линейно-независимых решений совпадают, т.е. случай $z_2(x_1) = z_2(x_2) = 0$, поэтому остается только $\exists x_3 \in (x_1,\ x_2)$.