Лекция 2.

Гл. I. Основные понятия. Простейшие типы ДУ.

§2. ОДУ 1-го порядка. (продолжение)

Напомним некоторые положения прошлой лекции.

Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}y(x)=f(x,\,y), & (2.2) \\ y(x_0)=y_0. & (2.НУ) \end{cases}$$

При этом

$x\in I\subset\mathbb{R}^1_x$ - независимое переменное,

$I\in\{(a,\,b),\,(a,\,b],\,[a,\,b),\,[a,\,b]\}$,

$y=y(x):I\to D\subset\mathbb{R}^1_y \quad \forall x\in I, \quad y(x)\in C^1(I)$,

$G=I\times D\subset\mathbb{R}^2_{x,\,y}$,

$f(x,\,y)\in C(G)$.

Теорема 2.1. (существования и единственности)

> Если $f(x,\,y)\in C(G)$, $\dfrac{\partial f(x,\,y)}{\partial y}\in C(G)$, область $G=I\times D\subset\mathbb{R}^2_{x,y}$,
> то $\forall$ точки $(x_0,\,y_0)\in G$ $\exists U_\delta(x_0)\subset I$,
> в которой решение $\bar{y}(x):U_\delta(x_0)\to D\subset\mathbb{R}^1_y$ задачи Коши (2.2)-(2.НУ) существует и единственно.

Теорема 2.1. гарантирует существование единственного решения ЗК (2.2)-(2.НУ) лишь в малой $U_\delta(x_0)$ - δ-окрестности точки x_0: $U_\delta(x_0)=[x_0-\delta,\,x_0+\delta]$.

Возникает естественный вопрос: а как складывается ситуация на всем промежутке I?

Пусть $y_1(x)=\varphi_1(x)$ - решение (1) $\forall x\in I_1$,

$y_2(x)=\varphi_2(x)$ - решение (1) $\forall x\in I_2$.

И $I_1\neq I_2$, $\tilde{I}=I_1\cap I_2\neq\emptyset$, а $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ $\forall x\in\tilde{I}$.

① $\underline{I_1\subset I_2}$ и $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ $\forall x\in I_1$.

Определение. Говорят, что $y(x)=\varphi_2(x)$ является ***продолжением*** решения $\bar{y}(x)=\varphi_1(x)$ с I_1 на I_2, или, что решение $\bar{y}(x)=\varphi_1(x)$ есть сужение решения $y(x)=\varphi_2(x)$ с I_2 на I_1.

② $\exists\, \tilde{I} = I_1 \cap I_2 :\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\ \forall x \in \tilde{I}$. $\tilde{I} \neq I_1,\ \tilde{I} \neq I_2$.

Определение. Говорят, что решения (2.2) $y(x) = \varphi_1(x)$ и $y(x) = \varphi_2(x)$ являются ***продолжением*** одно другого, а $y(x) = \varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in I_1, \\ \varphi_2(x), & x \in I_2 \end{cases}$ - решение (2.2) $\forall x \in I_1 \cup I_2$.

Если $\tilde{I}$ вырождается в точку, то происходит ***стыковка*** решений, тоже являющаяся решением (2.2).

Определение. Решение $y(x) = \varphi(x)$ на I уравнения (2.2) называется ***непродолжаемым*** (***максимально продолженным***), если не существует никакого другого решения (2.2), являющегося его продолжением.

Пример 2.6. Найти решение, удовлетворяющее условиям $y' = y^2$, $y(-1) = 1$.

□ $y = 0$ решение, не подходит по НУ.

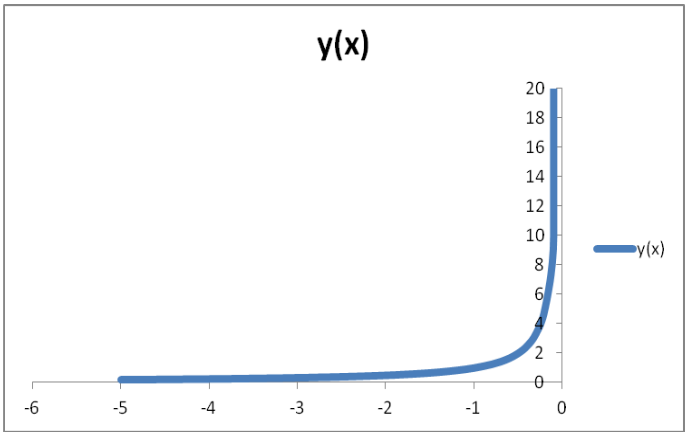
Итак, $y \neq 0$.

Тогда переменные разделяются

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

Интегрируем: $-\dfrac{1}{y} = x + C$.

Из НУ: $-\dfrac{1}{1} = -1 + C$, т.е. $C = 0$.



Решение $y = -\dfrac{1}{x}\ \forall x \in (-\infty, 0)$ - непродолжаемое (максимально продолженное).

■

Замечание 2.9. Решение ОДУ может быть непродолжаемо вправо, если

1) $\overline{\exists} \lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x)$,

2) $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = \pm\infty$,[1]

3) точка $(b,\ y(b)) \overline{\in} D(f)$.

Пример 2.7. Решить уравнение $2y' = \dfrac{y}{x}$, $y(-1) = 1$.

□ $y = 0$ решение, не подходит по НУ.

Итак, $y \neq 0$.

Тогда переменные разделяются $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем: $\ln|y| = \dfrac{1}{2}\ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$.

[1] См пример 2.6.

Потенциируем: $|y| = C_2\sqrt{|x|}$, $C_2 > 0$, $C_1 = \ln C_2$.

С учетом того, что $y = 0$ - решение, можно положить $C_2 \ge 0$.

Раскрываем модуль у y: $y = C\sqrt{|x|}$, $C \in \mathbb{R}$.

Из НУ: $1 = C\sqrt{|-1|}$, т.е. $C = 1$.

$y = \sqrt{-x} = \varphi(x)$ - решение при $x < 0$.

Предел $\lim\limits_{x\to 0-0} \varphi(x) = 0$ существует, но $f(x,\ y) = \dfrac{y}{2x}$ не определена при $x = 0$.

■

Теорема 2.2. (О продолжении решения до границы ограниченной области.)[2]

Пусть $f(x,\ y) \in C(G)$, $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} \in C(G)$, т.е $f(x,\ y)$удовлетворяет в области $G = I \times D \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ условиям **теоремы 1.1** (существования и единственности).

И пусть G_0 - ограниченная область с границей ∂G_0 такая, что $G_0 \cup \partial G_0 = \overline{G_0} \subset G$.

Тогда любое решение уравнения

$$\frac{d}{dx} y(x) = f(x,\ y), \tag{2.2}$$

проходящее внутри G_0, можно продолжить в обе стороны до выхода его графика на границу области G_0 (∂G_0),

т.е. продолжить на такой отрезок $[\alpha, \beta]$, что точки $(\alpha,\ y(\alpha)) \in \partial G_0$, $(\beta,\ y(\beta)) \in \partial G_0$ (лежат на границе области G_0).

Пример 2.8. Доказать, что решение задачи $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$ может быть продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$.

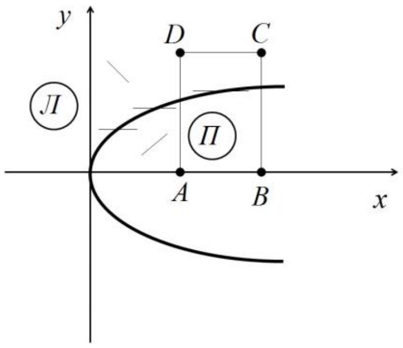
□ $f(x,\ y) = x - y^2$ удовлетворяет всем условиям **теоремы 2.1** (существования и единственности).

Следовательно, через любую точку $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2_{x,y}$ проходит единственная интегральная кривая.

ОДУ не интегрируется в конечном виде, поэтому при его изучении большую роль играют

- теоремы продолжимости и
- качественный анализ поведения интегральных кривых.

[2] Сейчас только формулировка - доказательство на лекциях 16, 17.



Кривая $x = y^2$ делит плоскость xOy на две части:

Л в левой из которых все решения убывают, так как $y' = x - y^2 < 0$,

П в правой возрастают: $y' = x - y^2 > 0$.

При этом интегральная кривая, проходящая через точку $(1,\ 0)$, не может выйти из правой части П плоскости, поскольку для этого ей пришлось бы пересечь кривую $x = y^2$, на которой $y' = 0$.

Пусть $A(1,\ 0)$, $B(b^2,\ 0)$, $D(1,\ 2b)$, $C(b^2,\ 2b)$, $G_0 = \{1 \le x \le b^2,\ 0 \le y \le 2b\}$.

Согласно **теореме 2.2** о продолжении решения вплоть до границы выход на границу возможен лишь на BC.

В силу произвольности b^2 решение продолжимо на $[1,\ +\infty)$.

■

Теорема 2.3. (о продолжении решения на весь заданный интервал).[3]

Пусть $G = \{\alpha < x < \beta,\ y \in \mathbb{R}\}$ (допускаются случаи $\alpha = -\infty$ и/или $\beta = +\infty$).

Пусть $f(x,\ y) \in C(G)$, $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} \in C(G)$,

и $\exists a(x) \in C((\alpha,\ \beta))$: $a(x) \ge 0\ \ \forall x \in (\alpha,\ \beta)$,

$\exists b(x) \in C((\alpha,\ \beta))$: $b(x) \ge 0\ \ \forall x \in (\alpha,\ \beta)$;

и $|f(x,\ y)| \le a(x)|y| + b(x)$.

Тогда любое решение уравнения

$$\frac{d}{dx} y(x) = f(x,\ y), \tag{2.2}$$

проходящее в G, можно продолжить на весь интервал $(\alpha,\ \beta)$.

Пример 2.9. Доказать, что задача Коши $y' = y + 2 + \sin y$, $y(0) = 0$ имеет решение, определенное на всем $\mathbb{R}$.

□ $f(x,\ y) = y + 2 + \sin y \in C(\mathbb{R}^2)$, $f'_y(x,\ y) = 1 + \cos y \in C(\mathbb{R}^2)$,

$|2 + \sin y| \le 3$.

$|f(x,\ y)| \le 1 \cdot |y| + |2 + \sin y| \le 1 \cdot |y| + 3$.

$\exists a(x) = 1 \in C(\mathbb{R})$, $\exists b(x) = 3 \in C(\mathbb{R})$: $a(x) \ge 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ и $b(x) \ge 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Все условия **теоремы 2.3** (о продолжении решения на весь заданный интервал) выполнены, поэтому решение поставленной задачи Коши продолжимо на всю $\mathbb{R}$.

■

[3] Сейчас только формулировка - доказательство на лекции 17.

§3. ОДУ 1-го порядка, интегрируемые в конечном виде.

$x \in I \subset \mathbb{R}^1_x,\ I \in \{(a,\, b),\, (a,\, b],\, [a,\, b),\, [a,\, b]\}$,
$y = y(x) : I \to D \subset \mathbb{R}^1_y,\ I \times D = G \in \mathbb{R}^2_{x,y}$.

ОДУ в общем виде

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3.1)$$

ОДУ в нормальной форме

$$y' = f(x, y) \qquad (3.2)$$

ОДУ в дифференциалах (симметричной форме)

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0 \qquad (3.3)$$

3.1 ОДУ с разделяющимися переменными.

3.1.а) ОДУ не содержит (явно) искомой функции.

Это ОДУ вида

$$y' = f(x). \qquad (3.2a)$$

Его можно записать в дифференциалах

$$dy = f(x)dx. \qquad (3.3a)$$

Замечание 3.1. ОДУ (3.2а) и (3.3а) не эквивалентны!!!

Из математического анализа известно, что если $f(x) \in C(I)$, то[4]

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + C,\ x,\, x_0 \in I \ -$$

общее решение[5].

Итак, решение существует.

Если мы хотим найти решение, проходящее через точку $(x_0,\ y_0)$, то постоянная C определяется единственным образом: $C = y_0$.

Замечание 3.2. $f(x) \xrightarrow[x \to x^* \in I]{} \infty$, оставаясь в остальных точках промежутка I непрерывной (см. 🕮 Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гл. 2, §3, случай 2) также представляет определенный интерес.

3.1.б) ОДУ не содержит (явно) независимого переменного.

Это ОДУ вида

---

[4] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.9, §9.1. Определение первообразной.
§14.4. Теорема 2 (теорема Барроу).

[5] Все интегральные кривые получаются из одной сдвигом, параллельным оси Oy.

$y' = f(y)$.

$f(y)$ не зависит явно от независимого переменного.

Если независимое переменное суть время t, то такие ОДУ принято называть <u>автономными</u> (см. лекцию 20).

① $\underline{f(y) \neq 0}$.

Этот случай сводится к предыдущему, если x и y поменять ролями.

$x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)} + C$ [6] - решение.

② $\underline{f(y_k) = 0}$, $k = 1, 2, \ldots$.

$\underline{y(x) \equiv y_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ -

решения, так как в этом случае

$\frac{dy}{dx} = 0$.

Точки $y_k \in \mathbb{R}_y$, $k = 1, 2, \ldots$ называются <u>стационарными точками</u>, или <u>положениями равновесия</u>, или <u>особыми</u>.

Решение ОДУ существует в обоих случаях - мы его нашли.

Единственность решения надо исследовать, если f_y не непрерывна.

Решение ОДУ, не содержащего независимого переменного, может не иметь форму общего решения.

Вспомним

Пример 2.5. Решить уравнение $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$.

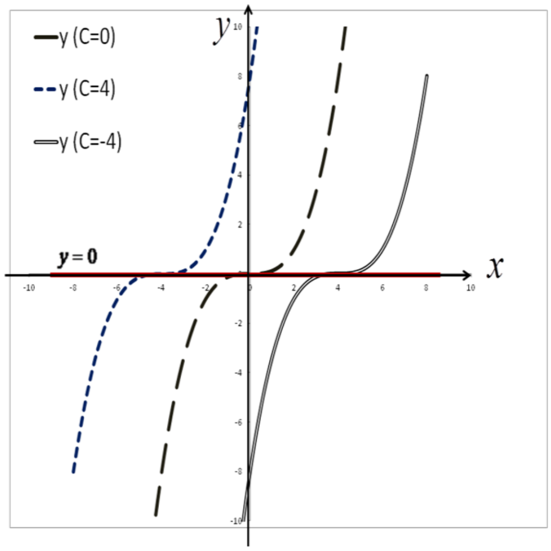
□ $f = f(y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ - непрерывна,

но $f_y = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$.

$f(y) = 0$ → $y = 0$ - решение.

$f(y) \neq 0$: $y = \frac{(x+C)^3}{8}$ - однопараметрическое семейство решений (не общее, так как ни при каком значении постоянной C мы не получим из него решение $y = 0$).

■



[6] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.9, §9.1. Определение первообразной.
§14.4. Теорема 2 (теорема Барроу).

3.1.в) ОДУ вида $y' = f(x)g(y)$.

Эти ОДУ интегрируются методом разделения переменных.

① $\underline{g(y) \neq 0}$.

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ - ОДУ с разделенными переменными.

Далее рассуждаем следующим образом:
вообразим, что нам известен y как функция x, являющаяся решением исходного ОДУ.
Тогда в обеих частях ОДУ с разделенными переменными стоят тождественно равные между собой дифференциалы,
только в правой части этот дифференциал выражен непосредственно через независимое переменное x,
а в левой части через посредство y - зависимой переменной, являющейся функцией от x.
Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы могут различаться только постоянным слагаемым.
Мы можем интегрировать левую часть по y, а правую по x.
Получим:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + C .$$ [7]

② $\underline{g(y_k) = 0}$, $k = 1, 2, \dots$.

$y(x) \equiv y_k$, $k = 1, 2, \dots$ - решения,
так как в этом случае $\frac{dy}{dx} = 0$.

Замечание 3.3. Решение примера 2.5 существует - мы его нашли.
Единственность надо исследовать.

3.1.г) ОДУ вида $y' = f(ax + by + c)$.

Правило 3.1. Уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c)$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой

$$z = z(x) = ax + by(x) + c .$$

Тогда

$$z' = a + by'$$

---

[7] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.9, §9.1. Определение первообразной.
§14.4. Теорема 2 (теорема Барроу).

и

$$z' = a + bf(z) = g(z).$$

Пример 3.1. Решить уравнение $y' = \cos(y - x)$.

□ Переменные не разделяются. ☹

☺ Замена $z(x) = y(x) - x$,

$$z' = y' - 1,$$

$$z' = \cos z - 1.$$

① $\underline{\cos z \neq 1}$.

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx.$$

Интегрируем

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx$$

или

$$\int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = \int dx,$$

т.е.

$$\boxed{\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C}, \ C \in \mathbb{R}.$$

② $\underline{\cos z = 1}$:

$z = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, - решение,

так как $z' = 0$.

Следовательно,

$$\boxed{y(x) - x = 2\pi k}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $y(x) = x + 2\operatorname{arcctg}(x + C)$, $C \in \mathbb{R}$,

$y(x) = x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

■

См. **замечание 3.3**.