

## Гл. VIII. Нормальные автономные системы ОДУ.

### §2. Простейшие свойства фазовых траекторий АСОДУ (1).

#### Свойство 2.6.

Если  $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$  - решение АСОДУ (1.1):  $\vec{\phi}(t_1) = \vec{\phi}(t_2)$ ,  $t_2 > t_1$ , и  $\vec{\phi}(t) \equiv / \equiv const$  (т.е. не положение равновесия), то

- ❶  $\vec{\phi}(t)$  - периодическое решение,
- ❷ у  $\vec{\phi}(t)$  существует наименьший положительный период, называемый **главным** периодом,
- ❸ фазовая траектория - замкнутая кривая без самопересечений.

○❶  $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\phi}(t + t_2 - t_1)$  - решение (1.1) по **свойству 2.1**.

$\vec{\psi}(t_1) = | \text{по построению} | = \vec{\phi}(t_1 + t_2 - t_1) = \vec{\phi}(t_2) = | \text{по условию} | = \vec{\phi}(t_1)$ , следовательно, по **теореме 1**. (существования и единственности) (лекция 15)  $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\phi}(t)$ .

Итак,  $\vec{\phi}(t) \equiv \vec{\psi}(t) = \vec{\phi}(t + C)$ , где  $C = t_2 - t_1$ , следовательно,  $\vec{\phi}(t) = \vec{\phi}(t + C)$  и решение периодическое.

❷ Так как  $\vec{\phi}(t) \equiv / \equiv const$ , то  $\exists t^*: \vec{\phi}(t^*) = \vec{\phi}(t_1)$ , т.е.  $|\vec{\phi}(t^*) - \vec{\phi}(t_1)| = r > 0$ .

$\vec{\phi}(t)$  - непрерывная:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta) |\vec{\phi}(t) - \vec{\phi}(t_1)| < \varepsilon$ .

Пусть  $\varepsilon = r$ . Тогда  $\forall t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \vec{\phi}(t) \neq \vec{\phi}(t^*)$ .

За период  $T = C = t_2 - t_1 > 0$  решение должно пройти через все точки своей траектории, поэтому  $T \geq 2\delta$ .

И, следовательно, существует  $\inf T = T^* \geq 2\delta$ .

□ Покажем, что  $T^*$  - период от противного: допустим, что  $T^*$  не является периодом.

Построим последовательность периодов  $\{T_i\}_i^\infty: T_i > 0^1$ .  $T_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} T^* + 0$ ,  $\vec{\phi}(t + T_i) \equiv \vec{\phi}(t)$ .

Переходя к пределу и в силу непрерывности, получим  $\vec{\phi}(t + T^*) \equiv \vec{\phi}(t)$  - противоречие.

В силу полученного противоречия  $T^*$  - период. ■

❸ Траектория  $\vec{\phi}(t)$ ,  $t \in [0, T^*]$  - замкнутая кривая, т.к.  $\vec{\phi}(0) = \vec{\phi}(T^*)$ .

Тот факт, что она без самопересечений докажем от противного.

□ Допустим, что  $\exists t_3, t_4 \in [0, T^*]: t_3 \neq t_4$ , а  $\vec{\phi}(t_3) = \vec{\phi}(t_4)$ .

По доказанному выше существует период  $T_C = |t_3 - t_4| > 0$  и при этом  $T_C \leq T^*$ .

Но  $T^*$  - наименьший (положительный) период.

Следовательно, у кривой  $\vec{\phi}(t)$  не может быть самопересечений. ■

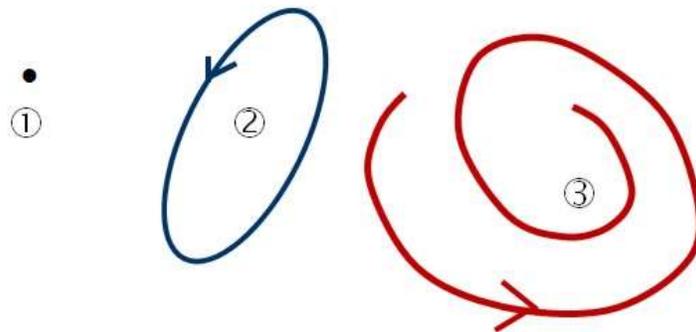


#### Теорема 2.1. (О фазовых траекториях АСОДУ (1.1))

<sup>1</sup> Знак ">" не принципиален. Если  $T$  - период, то  $\vec{\phi}(t) = \vec{\phi}(t + T)$ ; при  $t_1 = t - T: \vec{\phi}(t - T) = \vec{\phi}(t)$ , и, следовательно,  $(-T)$  - период.

Всякая фазовая траектория АСОДУ (1.1) принадлежит к одному из трех типов:

- ① положение равновесия,
- ② замкнутая траектория,
- ③ траектория без самопересечений.



### §3. Устойчивость положений равновесия.

$$\begin{aligned} & \text{АСОДУ} \\ \frac{d}{dt} \vec{x}(t) &= \vec{f}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

рассматривается в предположении, что  $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(D)$ ,  $D \in R^n$ ,  $D$  - фазовое пространство.

**Лемма 3.1.**(о параметрическом представлении)

Пусть  $f_n(\vec{x}_0) \neq 0$ .

Тогда решение задачи Коши для (3.1) с начальным условием

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

дает в некоторой окрестности точки  $t = t_0$  параметрическое представление решения

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(\vec{x}_0)}{f_n(\vec{x}_0)}, \quad i = \overline{1, n-1} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$x_i(x_{0n}) = x_{0i}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

О Из последнего ДУ АСОДУ (3.1) видно, что  $\dot{x}_n(t_0) \neq 0$ .

По непрерывности  $\dot{x}_n(t)$  сохраняет знак вблизи точки  $t = t_0$ , таким образом,  $x_n = x_n(t)$ .

Но тогда существует обратная функция  $t = t(x_n)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $x_{0n}$ .

Суперпозиция  $x_i = x_i(t(x_{0n}))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , является решением задачи Коши для (3.2). ●

Аналогично доказывается случай  $f_k(\vec{x}_0) \neq 0$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ .

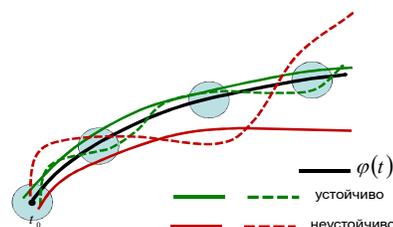
Интегральная кривая- график решения.

**Определение.** Траекторию АСОДУ (3.1), не являющуюся положением равновесия, будем называть **интегральной кривой** (3.2) (а также для случаев при  $f_k(\vec{x}_0)$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ).

Понятие устойчивости: интегральная кривая, обладающая тем свойством, что все достаточно близкие к ней при  $t = t_0$  интегральные кривые остаются близкими к ней при  $t > t_0$ , называется **устойчивой интегральной кривой**,

а соответствующее ей решение - **устойчивым решением**.

В противном случае говорят, что решение **неустойчиво**.

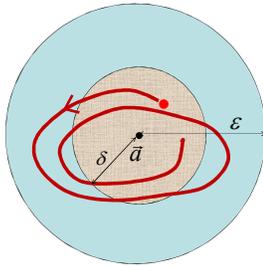


**Замечание 3.1.** Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора начального момента  $t_0$ .

**Определение.** Решение  $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$  АСОДУ (3.1) называется устойчивым по Ляпунову, если

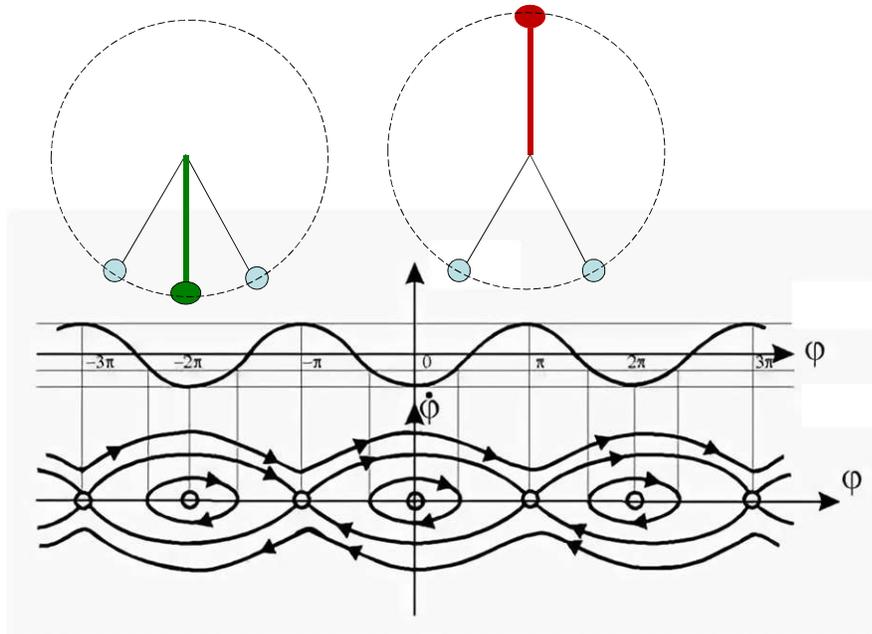
- ①  $\exists \delta_0 > 0: \forall \vec{x}_0^*: |\vec{x}_0^* - \vec{x}_0| < \delta_0$  решение (3.1) существует на всей полуоси  $[t_0, +\infty)$ ;
- ②  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |\vec{x}_0^* - \vec{x}_0| < \delta \rightarrow |\vec{x}(t, \vec{x}_0^*) - \vec{x}(t, \vec{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$ .

Заменяя  $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$  на  $\vec{x} = \vec{a}$  - положение равновесия (3.1) получим определение устойчивости по Ляпунову для АСОДУ.



Итак: Положение равновесия  $\vec{a}$  устойчиво по Ляпунову, если для любой его окрестности  $U_\varepsilon^o(\vec{a})$  можно указать такую его окрестность  $U_\delta^o(\vec{a})$ , что любое движение, начинающееся в  $U_\delta^o(\vec{a})$  не покинет  $U_\varepsilon^o(\vec{a})$ .

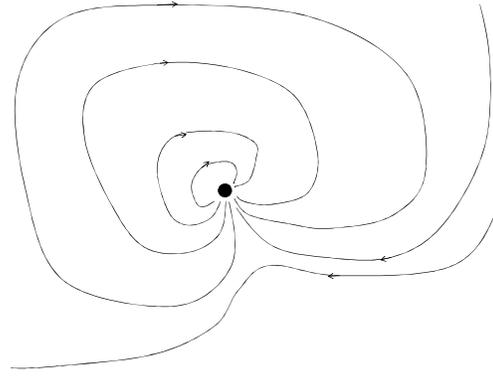
**Пример 3.1.** Нижнее/верхнее вертикальное положение (математического) маятника.  
□



**Определение.** Устойчивое по Ляпунову положение равновесия  $\vec{x} = \vec{a}$  называется **асимптотически устойчивым**, если оно

- ① устойчиво по Ляпунову,
- ②.  $\exists \delta^* > 0: \forall \vec{x}(t_0): |\vec{x}(t_0) - \vec{a}| < \delta^* \lim_{t \rightarrow +\infty} (\vec{x}(t) - \vec{a}) = \vec{0}$ .

**Замечание 3.2.** Может показаться, что требование устойчивости по Ляпунову излишне. Но! Оно не вытекает автоматически из асимптотической устойчивости (см. рис.) - все траектории сходятся к положению равновесия, но устойчивости нет.



**Первый метод Ляпунова:** исследование устойчивости положения равновесия АСОДУ (3.1)

Заключение об устойчивости (в этом методе) делается на основе изучения поведения фазовых траекторий.

Вблизи положения равновесия нелинейную АСОДУ (3.1) можно заменить линейной АСОДУ - линейным приближением к исходной АСОДУ (3.1)

$\vec{a}$  - положение равновесия (3.1), т.е.  $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$ .

Перейдем к новой неизвестной функции  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{a}$ :

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z} + \vec{a}) = \vec{f}(\vec{a}) + A\vec{z} + R(\vec{z}),$$

где  $A = \left( \frac{\partial f_i(\vec{a})}{\partial x_j} \right)$ ,  $ij, = \overline{1, n-1}$  - матрица Якоби,  $R(\vec{z}) = o(|\vec{z}|)$  при  $\vec{z} \rightarrow \vec{0}$ .

Если вблизи точки  $\vec{z} = \vec{0}$  пренебречь малой нелинейной добавкой  $R(\vec{z})$ , то получим линейную АСОДУ:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = A\vec{z}. \tag{3.3}$$

ЛФСОДУ (3.3) - линейное приближение к (3.1),  
первое приближение к (3.1).

Задача: выяснить условия, при которых по устойчивости положения равновесия (3.3)  $\vec{z} = \vec{0}$  можно судить об устойчивости положения равновесия (3.1)  $\vec{x} = \vec{a}$ .

Оказывается информация об устойчивости или неустойчивости  $\vec{z} = \vec{0}$  для (3.3) можно получить, рассматривая спектр матрицы  $A$ .

**Теорема 3.1.** (достаточные условия устойчивости/неустойчивости)

Если все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части, то  $\vec{z} = \vec{0}$  является асимптотически устойчивым положением равновесия ЛАСОДУ (3.3).

Если же хоть одно собственное значение  $A$  имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия  $\vec{z} = \vec{0}$  ЛАСОДУ (3.3) неустойчиво (по Ляпунову).

○①  $Re \lambda_k < 0$ .

$$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k, \vec{v}_k \neq \vec{0}, k = \overline{1, n}.$$

Пусть  $Re \lambda_k < -\alpha$ ,  $k = \overline{1, n}$ , где  $\alpha > 0$ .

Разложим решение (3.2)  $\vec{z}$  по базису из собственных векторов  $A$ , если такого базиса не существует, то строим жорданову цепочку и раскладываем по жорданову базису  $\vec{h}_l$ ,  $l = \overline{1, n}$ : - в общем случае  $\vec{z}(t, \vec{z}_0) = \sum_{k=1}^n P_m^{(k)} \vec{h}_k e^{\lambda_k t}$ . Здесь  $\lambda_k$  могут совпадать,  $m \leq n$ .

$$|\vec{z}(t, \vec{z}_0)| \leq \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k P_m^{(k)} e^{\lambda_k t}| = \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k P_m^{(k)}| |e^{(\lambda_k + \alpha)t}| e^{-\alpha t}$$

$$|e^{(\lambda_k + \alpha)t}| = |e^{Re(\lambda_k + \alpha)t} e^{i Im \lambda_k t}| = e^{(Re \lambda_k + \alpha)t} |e^{i Im \lambda_k t}| = e^{(Re \lambda_k + \alpha)t}$$

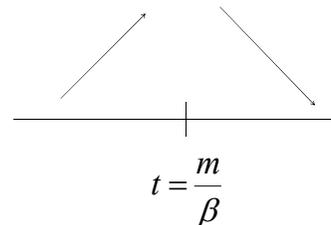
$Re \lambda_k + \alpha < 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Пусть  $Re \lambda_k + \alpha \leq -\beta < 0$ .

Оценим  $g(t) = t^m e^{-\beta t}$ :

$$g'(t) = m t^{m-1} e^{-\beta t} - \beta t^m e^{-\beta t} = (m - \beta t) t^{m-1} e^{-\beta t}$$

$$g'(t) = 0 \text{ при } t = \frac{m}{\beta}$$

Следовательно,  $\exists C > 0: |t^m e^{(\lambda_k + \alpha)t}| \leq C e^{(Re \lambda_k + \alpha)t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ ,  $C = \left(\frac{m}{\beta}\right)^m$ .



При  $t > 1$   $|P_m^{(k)}| \leq \sum_{j=0}^m t^j |a_{m-j}^{(k)}| \leq \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \sum_{j=0}^m t^j \leq \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| m t^m$ .

Тогда  $|\vec{z}(t, \vec{z}_0)| \leq \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k P_m^{(k)} e^{\lambda_k t}| = \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| |P_m^{(k)}| |e^{Re \lambda_k t} e^{i Im \lambda_k t}| =$

$$\sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| |P_m^{(k)}| e^{Re \lambda_k t} \leq \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| m t^m e^{Re \lambda_k t} \leq \max_k \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \cdot$$

$$\sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| m t^m e^{Re \lambda_k t} \leq \max_k \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \cdot \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| m t^m e^{(Re \lambda_k + \alpha)t} \cdot e^{-\alpha t} \leq \max_k \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \cdot$$

$$e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| m t^m e^{-\beta t} \leq \max_k \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \cdot e^{-\alpha t} n (t^n e^{-\beta t}) \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| \leq$$

$$\max_k \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \cdot e^{-\alpha t} n \left(\frac{n}{\beta}\right)^n \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k| \leq C_1 \cdot e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

$$C_1 = \max_k \max_{m-j} |a_{m-j}^{(k)}| \cdot n \left(\frac{n}{\beta}\right)^n \sum_{k=1}^n |\vec{h}_k|$$

Отсюда следует, что и  $|P_m^{(k)} e^{\lambda_k t}|$  - ограниченные функции на  $[0, +\infty)$ .

Рассмотрим теперь фундаментальную матрицу (3.3)  $Y^*(t)$ , удовлетворяющую условию  $Y^*(0) = E$ .

В силу выше изложенного найдется  $M_\alpha = const > 0: \|Y^*(t)\| \leq M_\alpha e^{-\alpha t}$ .

При этом  $\vec{z}(t, \vec{z}_0) = Y^*(t) \vec{z}_0$ , откуда  $|\vec{z}(t, \vec{z}_0)| \leq M_\alpha |\vec{z}_0|$ .

Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M_\alpha} > 0 \|\vec{z}_0\| < \delta \rightarrow \|\vec{z}(t, \vec{z}_0)\| < \varepsilon \forall t \in [t_0, +\infty)$ , т.е. решение устойчиво (по Ляпунову).

А так как  $|\vec{z}(t, \vec{z}_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , то оно асимптотически устойчиво.

② Пусть теперь  $\exists l: Re \lambda_l > 0$ ,  $\vec{v}_l$  - соответствующий собственный вектор.

Выберем  $\vec{z}_0 = \beta \vec{v}_l$ ,  $\vec{z} = \beta \vec{v}_l e^{\lambda_l t}$ ,  $Re \vec{z} = \beta \vec{v}_l e^{Re \lambda_l t} \cos(Im \lambda_l t)$ .

При  $Im \lambda_l = 0$  имеем  $\vec{z} = \beta \vec{v}_l e^{\lambda_l t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ .

Рассмотрим теперь при  $Im \lambda_l \neq 0$  точки  $t_p = \frac{2\pi p}{Im \lambda_l}$ .

$Re \vec{z}(t_p) = \beta \vec{v}_l e^{Re \lambda_l t_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty$  для  $\forall \beta$  сколь угодно малых.

Следовательно, положение равновесия  $\vec{z} = \vec{0}$  ЛФСДУ (3.3) не является устойчивым. ●

Гидродинамическая интерпретация:

ТРАЕКТОРИЯ - след движущейся частицы,

УСТОЙЧИВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ - сток,

НЕУСТОЙЧИВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ - источник.

