Лекция 26 (11).

Гл. X. Элементы вариационного исчисления.

§2. Простейшая задача вариационного исчисления..

В приложениях часто встречаются функционалы вида:

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (2.1)$$

где $F(x, y, p)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x\in[a,b]$ и $\forall(y, p)\in R^2_{(y,p)}$ – плоскости с декартовыми прямоугольными координатами y, p.

Простейшей вариационной задачей (ПВЗ) называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (2.1) в классе

$$M=\{y(x): y(x)\in C^1([a, b]),\ y(a)=A,\ y(b)=B\} \qquad (2.2)$$

– непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям с фиксированным значением допустимой функции на концах промежутка – ***задача с закрепленными концами***.

Обозначим за $C^{*1}([a, b])$ пространство функций $f(x)\in C^1([a, b])$, на которые наложено дополнительное ограничение в виде однородных граничных условий: $f(a)=f(b)=0$.

Допустимыми приращениями для ПВЗ будут

$$h(x)\in M^*=\{h(x): h(x)\in C^{*1}([a, b])\} \qquad (2.3)$$

Лемма 2.1. Пусть для $\Phi(x)\in C([a, b])$ и $\forall\ \eta(x)\in C^{*1}([a, b])$ имеет место

$$\int_a^b \Phi(x)\eta'(x)dx=0,$$

тогда $\Phi(x)\equiv const$ для $\forall\ x\in[a,b]$.

○ Обозначим $\eta'(x)=k(x)$. Т.к. $\forall\ \eta(x)\in C^{*1}([a, b])$, то $k(x)\in C([a, b])$.

Тогда $\eta(x)=\int_a^x k(\xi)d\xi$,

причем $\eta(a)=0$ по построению,

а $\eta(b)=\int_a^b k(\xi)d\xi=0$ по условию.

$\int_a^b \Phi(\xi)d\xi=A$. Положим $C=\dfrac{A}{b-a}$. Тогда $\int_a^b(\Phi(\xi)-C)d\xi=0$.

Рассмотрим функцию $g(x)=\int_a^x(\Phi(\xi)-C)d\xi\in M^*$.

Так как $\eta(x)\in C^{*1}([a,\ b])$ – произвольная, то можем выбрать $\eta(x)=g(x)$, при этом $\eta'(x)=k(x)=\Phi(x)-C$.

Рассмотрим теперь интеграл $I=\int_a^b(\Phi(\xi)-C)^2d\xi$.

Т.к. $(\Phi(\xi)-C)^2\geq 0$, то и $\underline{I\geq 0}$.

С другой стороны $I=\int_a^b\Phi(\xi)(\Phi(\xi)-C)d\xi-C\int_a^b(\Phi(\xi)-C)d\xi$.

- При этом $\int_a^b\Phi(\xi)(\Phi(\xi)-C)dx=\int_a^b\Phi(\xi)k(\xi)d\xi=\int_a^b\Phi(\xi)\eta'(\xi)d\xi=0$ по условию,
- а $\int_a^b(\Phi(\xi)-C)d\xi=0$ по построению,

т.е. $I=0$.

Но тогда $(\Phi(x)-C)^2=0$ для $\forall\ x\in[a,b]$,
т.е. $\Phi(x)=C=const$ для $\forall\ x\in[a,b]$. ●

Лемма 2.2. Пусть для $\varphi(x)\in C([a,\ b])$, $f(x)\in C([a,\ b])$ и $\forall\ \eta(x)\in C^{*1}([a,\ b])$ имеет место $\int_a^b(\varphi(x)\eta(x)+f(x)\eta'(x))dx=0$.
Тогда
$f(x)\in C^1([a,\ b])$,
$\varphi(x)-\dfrac{d}{dx}f(x)=0$.

○ Положим $\Phi(x)=\int_a^x\varphi(\xi)d\xi$.

Тогда $\Phi(a)=0$ и,
т.к. $\Phi'(x)=\varphi(x)\in C([a,\ b])$, то $\Phi(x)\in C^1([a,\ b])$.

$$\int_a^b\varphi(x)\eta(x)dx=\Phi(x)\eta(x)\Big|_a^b-\int_a^b\Phi(x)\eta'(x)dx=-\int_a^b\Phi(x)\eta'(x)dx,$$

т.к. $\Phi(\xi)\eta(\xi)\Big|_a^b=\Phi(a)\eta(a)-\Phi(b)\eta(b)=0$ поскольку по условию $\eta(a)=\eta(b)=0$.

Тогда $0=\int_a^b(\varphi(x)\eta(x)+f(x)\eta'(x))dx\ =0=\int_a^b[-\Phi(x)+f(x)]\eta'(x)dx$.

По **лемме 2.1** $f(x)-\Phi(x)=const$, т.е. $f(x)=\Phi(x)+const\in C^1([a,\ b])$ поскольку $\Phi(x)\in C^1([a,\ b])$.

При этом $\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\Phi(x)=\Phi'(x)=\varphi(x)\in C([a,\ b])$.

Откуда получаем, что $\varphi(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$ или $\varphi(x)-\dfrac{d}{dx}f(x)=0$. ●

Замечание 2.1. Отметим еще раз, что изначально дифференцируемость функции $f(x)$ не предполагалась - только непрерывность.

Лемма 2.3. При $\forall\ y(x)\in M$ функционал (2.1) с $F=F(x,y,p)$ – дважды непрерывно дифференцируемой функцией для $\forall x\in[a,b]$ и $\forall(y,p)\in R^2_{(y,p)}$, имеет при $\forall\ h(x)\in M$ вариацию

$$\delta J_y[h(x)]=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}h'(x)\right]dx.$$

○ $\Delta J=J[y+h]-J[y]=\int_a^b F(x,y+h,y'+h')dx-\int_a^b F(x,y,y')dx=$

$$=\int_a^b[F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')]dx.$$

По условию (в соответствии с постановкой ПВЗ) $F(x,y,p)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, следовательно, имеет непрерывные первые производные по всем аргументам, следовательно, достаточные условия дифференцируемости выполнены, и

$F(x,y+h,y'+h')=F(x,y,y')+dF(x,y,y')+o(\|h\|_{C^1})$.

Таким образом

$$\Delta J=\int_a^b\left[dF(x,y,y')+o(\|h\|_{C^1})\right]dx=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}h+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}h'\right]dx+\int_a^b o(\|h\|_{C^1})dx,$$

где $\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}h+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}h'\right]dx$ – линейный по $h(x)$ функционал, т.е. вариация $\delta J_y[h(x)]=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}h'(x)\right]dx$ при $\forall\ h(x)\in M$, в том числе и допустимом. ●

Замечание 2.1. В ПВЗ допустимое приращение $h(x)\in M^*\subset M$.

Теорема 2.1. Для того, чтобы функционал (2.1) с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $F=F(x,y,p)$ при $y=y_0(x)\in M$ достигал экстремума, необходимо, чтобы эта функция $y=y_0(x)$ удовлетворяла ***уравнению Эйлера***

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad (2.4).$$

○ Согласно **теореме 1.1** при достижении функционалом экстремума при $y=y_0(x)$ необходимо, чтобы его первая вариация обращалась в нуль при $y=y_0(x)$: $\delta J_{y_0}[h(x)]=0$ для $\forall\ h(x)\in M^*\subset M$.

Согласно **лемме 2.3** у функционала (2.1) существует вариация $\delta J_y[h(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} h'(x) \right] dx$, которая при $y = y_0(x)$ необходимо обращается в нуль:

$$\delta J_{y_0}[h(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'} h'(x) \right] dx = 0 \text{ при } \forall\ h(x) \in M .$$

Обозначим $\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y} = \varphi(x)$, $\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'} = f(x)$ и $h(x) = \eta(x)$. Причем $\varphi(x) \in C([a, b])$ и $f(x) \in C([a, b])$, т.к. $F = F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируема, а $\eta(x) \in M^*$ – произвольная

Согласно **лемме 2.2**, все условия которой выполнены, получаем $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ для $\forall x \in [a, b]$.

Более того, т.к. по **лемме 2.2** $f(x) \in C^1([a, b])$, то $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} f(x) \in C([a, b])$.

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y''$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ - непрерывны ($F = F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируема), $y = y_0(x) \in M$ ($y = y_0(x) \in C^1([a, b])$). Т.е. $y_0'' \in C([a, b])$ и, следовательно, имеем $y(x) \in C^2([a, b])$. ●

Замечание 2.3.1. В уравнении (2.4) $\frac{d}{dx}$ – полная производная по x.

Замечание 2.3.2. Уравнение (2.4) было опубликовано в 1744 году.

Определение. Интегральные кривые уравнения Эйлера называются ***экстремалями***.

Это название ввел Кнезер в 1900 г.

Определение. Всякая экстремаль функционала (2.1), принадлежащая классу M (2.2), т.е. являющаяся допустимой функцией, называется ***допустимой экстремалью***.

Теорема 2.2. Пусть $y = y(x)$ - решение уравнения Эйлера (2.4) (экстремаль). Если функция $F = F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то $\forall x \in [a, b]$: $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$, функция $y = y(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

○ Рассмотрим разность

$$\Delta F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = F_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_{y'}(x, y, y') =$$

$$= \Delta x \widetilde{F}_{y'x} + \Delta y \widetilde{F}_{y'y} + \Delta y' \widetilde{F}_{y'y'} .$$

Знак "~" указывает, что производные берутся в некоторой промежуточной точке.

Разделим эту разность на Δx: $\widetilde{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\widetilde{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x}\widetilde{F}_{y'y'}$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\widetilde{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\widetilde{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x}\widetilde{F}_{y'y'}\right)$ существует, так как $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$ в силу уравнения Эйлера (2.4).

А так как существуют вторые производные, то $\widetilde{F}_{y'x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} F_{y'x}$, $\widetilde{F}_{y'y} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} F_{y'y}$, $\widetilde{F}_{y'y'} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} F_{y'y'}$, и $y = y(x) \in C^1([a, b])$, то существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y'}{\Delta x}\widetilde{F}_{y'y'}\right)$, и существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''$.

Из уравнения Эйлера (2.4) можно найти выражение для y'': $y'' = \frac{F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y'}{F_{y'y'}} \in C([a, b])$ при $F_{y'y'} \neq 0$. ●

Пример 2.1а. $J[y(x)] = \int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2 - y^2\right]dx$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

□ $F(x, y, y') = (y')^2 - y^2$.

$F'_y = -2y$, $F'_{y'} = 2y'$, $\frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''$.

Уравнение Эйлера: $-2y - 2y'' = 0$ или $y'' + y = 0$ - однородное ЛОДУсПК.

Решения однородного линейного уравнения ищем в виде $y = e^{\lambda t}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,\,2} = \pm i$.

Соответствующее общее решение однородного уравнения ($\boxed{!}$ в вещественном виде) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ - экстремаль.

$y \in M$, если $y(0) = y(\pi) = 0$.

$C_1 = 0$ и $\underline{y = C_2\sin x}$ - допустимая экстремаль, $\boxed{!}$ $C_2 - \forall$. ■

Замечание 2.1. Решение КЗ в отличие от решения ЗК

- может не существовать: $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$;
- существовать, но не быть единственным: $y'' + y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ - наш случай;
- существовать и быть единственным: $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Рассмотрим КЗ (краевую задачу) для ЛОДУ 2-го порядка

$$y''(x) + d(x)y'(x) + e(x)y(x) = f(x), \tag{2.5}$$

т.е. задачу, где дополнительные условия задаются более чем в одной точке. Обычно на концах промежутка - отсюда и название КЗ.

Будем рассматривать линейные краевые (граничные) условия:

левая часть - линейная комбинация искомой функции и ее производной в заданной точке, а правая часть заданное постоянное число:
$\alpha y(a)+\beta y'(a)=A$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Основные типы ГУ (граничных условий):

1. $\beta=0$: $y(a)=A$ - ГУ 1-го рода (типа Дирихле),
2. $\alpha=0$: $y'(a)=A$ - ГУ 2-го рода (типа Неймана),
3. $\alpha\cdot\beta\neq 0$: $\alpha y(a)+\beta y'(a)=A$ - ГУ 3-го рода (смешанное ГУ).

Определение. Если постоянная в правой части ГУ равна нулю, то ГУ называется
однородным,
в противном случае - ***неоднородным***.

В ПВЗ ГУ 1-го рода (типа Дирихле).

Для нахождения допустимой экстремали имеем КЗ вида

$$\begin{cases} y''+d(x)y'+e(x)y=f, & (2.5)\quad \text{ОДУ } 2-\text{го порядка} \\ y(a)=A, & (2.6)\quad \text{ЛГУ} \\ y(b)=B. & (2.7)\quad \text{ПГУ} \end{cases}$$

Исследуем решение КЗ (2.5), (2.6), (2.7).

Согласно теории, общее решение (2.5) имеет вид
$y=C_1y_1+C_2y_2+y_ч$,
где y_1, y_2 - ФСР, C_1, C_2 - произвольные постоянные, $y_ч$ - частное решение неоднородного ОДУ.

Задача нахождения экстремали (при найденном двухпараметрическом семействе экстремалей) сводится к следующей:
найти числа C_1 и C_2 такие, чтобы решение ЛОДУ (2.5) (экстремаль), удовлетворяло ГУ (2.6), (2.7) (являлось допустимой экстремалью), т.е. чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} C_1y_1(a)+C_2y_2(a)=A-y_ч, \\ C_1y_1(b)+C_2y_2(b)=B-y_ч. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Т.о., задача свелась к исследованию решений СЛАУ второго порядка (2.8) относительно C_1 и C_2.

Наряду с задачей (2.5), (2.6), (2.7) поставим КЗ для однородного ОДУ с однородными ГУ (***однородную КЗ***):

$$\begin{cases} y''+d(x)y'+e(x)y=0, & (2.9) \\ y(a)=0, & (2.10) \\ y(b)=0. & (2.11) \end{cases}$$

Теорема 2.2. КЗ (2.5), (2.6), (2.7) имеет и при том единственное решение тогда и только тогда, когда КЗ (2.9), (2.10), (2.11) имеет только тривиальное решение: $y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

○ Оба условия эквивалентны утверждению $\det\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{pmatrix} \neq 0$.●

Иногда уже по виду ОДУ можно сделать вывод о разрешимости КЗ:
ОДУ (2.9) с помощью

- замены независимого переменного или
- замены искомой функции $y(x) = u(x) \cdot z(x)$ (Лекция 19 (4))

приводим к виду
$z''(x) + Q(x)z(x) = 0$,
не содержащему первую производную.

Здесь
$Q(x) = -\frac{1}{2}d'(x) - \frac{1}{4}d^2(x) + e(x)$ - инвариант,
$u = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d(x)dx\right\} > 0$.

Тогда $z(a) = 0$, так как $0 = y(a) = u(a) \cdot z(a)$ при $u(a) \neq 0$ и
$z(b) = 0$, так как $0 = y(b) = u(b) \cdot z(b)$ при $u(b) \neq 0$.

И если $Q(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b]$, то по **следствию 2.1** теоремы Штурма (сравнения) (Лекция 19 (4)) решение (2.9) неколеблющееся, т.е. $y(x) \equiv 0$. И, следовательно, КЗ имеет единственное решение.

Пример 2.1б. $J[y(x)] = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 - y^2\right]dx$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

□ Ранее нашли экстремаль $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

ФСР: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

$x \in [0, \pi]$ и $\det\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos\pi & \sin\pi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Т.о.,

- либо решений нет,
- либо их бесконечно много.

Т.к. $Q(x) = 1 > 0$, то решение может быть колеблющимся (все зависит от длины промежутка).■

Возвращаясь к вариационной задаче, заметим, что $\delta J_{y_0}[h(x)] = 0$ - необходимое условие для достижения функционалом экстремума при $y = y_0(x)$ (отнюдь не достаточное).

Поэтому после того как нашли допустимые экстремали, требуется дополнительное исследование, чтобы установить, реализуется ли на них экстремум функционала.

Целесообразно попытаться выполнить исследование на экстремум непосредственно по определению.

Проиллюстрируем это на рассматриваемом примере (не самый лучший вариант, так как решение КЗ не единственное).

Пример 2.1в. $J[y(x)]=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2-y^2\right]dx,\ y(0)=y(\pi)=0.$

□ $\hat{y}=C_2\sin x$ - допустимая экстремаль, $\boxed{!}$ $C_2 - \forall$.

$y=\hat{y}+h(x),\ h(x)\in M^*.$

Рассмотрим приращение функционала $\Delta J=J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})$.

Если $\forall h(x)\in M^*$ (т.е. $\forall y(x)\in M$) $\Delta J\geq 0$ - минимум,

$\Delta J\leq 0$ - максимум

или экстремума нет.

$$\Delta J=J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})=\int\limits_0^{\pi}\left[(\hat{y}'+h')^2-(\hat{y}+h)^2\right]dx-\int\limits_0^{\pi}\left[(\hat{y}')^2-\hat{y}^2\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left[2\hat{y}'h'+(h')^2-2\hat{y}h-h^2\right]dx=\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\left[2\hat{y}'h'-2\hat{y}h\right]dx}_{\textit{линейная часть}}+\int\limits_0^{\pi}\left[(h')^2-h^2\right]dx.$$

Линейная часть - первая вариация, следовательно обращается в нуль.

Непосредственно убедимся в этом (в плане проверки)

$$\int\limits_0^{\pi}\left[2\hat{y}'h'-2\hat{y}h\right]dx=\int\limits_0^{\pi}2\hat{y}'h'dx-\int\limits_0^{\pi}2\hat{y}hdx=\int\limits_0^{\pi}2\hat{y}'dh-\int\limits_0^{\pi}2\hat{y}hdx=$$

$$=\left.(2\hat{y}h)\right|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}2\hat{y}''hdx-\int\limits_0^{\pi}2\hat{y}hdx=\left|\begin{matrix}h(x)\in M^*,\ \textit{т.е.}\\ h(0)=h(\pi)=0\end{matrix}\right|=-2\int\limits_0^{\pi}h\left[\hat{y}''+\hat{y}\right]dx=0,$$ так как

$\hat{y}$ - решение уравнения Эйлера: $\hat{y}''+\hat{y}=0$.

Итак,

$$\Delta J=\int\limits_0^{\pi}\left[(h')^2-h^2\right]dx.$$

Остается вопрос о знаке приращения.

Представим $1=\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$.

$$\Delta J=\int\limits_0^{\pi}\left[(h')^2-\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}h^2\right]dx=\int\limits_0^{\pi}\left[(h')^2-\frac{1}{\sin^2 x}h^2\right]dx+\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}h^2dx.$$

$\sin 0=\sin\pi=0$, но $h(x)\in M^*$, т.е. $h(0)=h(\pi)=0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{\sin x}\overset{\substack{\textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h'(x)}{\cos x}$ - существует, следовательно особенность при $x=0$ устранимая. Аналогично при $x=\pi$.

$$-\int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 x} h^2 dx = \int_0^\pi h^2 d\operatorname{ctg} x = \left(h^2 \operatorname{ctg} x\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2hh' \operatorname{ctg} x dx = \left| \begin{array}{l} h(x) \in M^*, \text{ т.е.} \\ h(0) = h(\pi) = 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int_0^\pi 2hh' \operatorname{ctg} x dx .$$

Т.о.,

$$\Delta J = \int_0^\pi \left[(h')^2 - 2hh' \operatorname{ctg} x + h^2 \operatorname{ctg}^2 x \right] dx = \int_0^\pi \left[h' - h \operatorname{ctg} x \right]^2 dx \geq 0 .$$

Итак, решений бесконечно много, причем все они доставляют абсолютный min поставленной вариационной задаче. ■