Лекция 30 (15).

Гл. VI. Исследование задачи Коши.

§6. Зависимость ЗК от параметров и начальных данных.

Напомним основные понятия.

Определение. ***Нормальной системой в форме*** (виде) ***Коши*** называется система обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x)=\vec{f}(x,\ \vec{y}) \tag{1.1}$$

При этом $x \in I \subset \mathbb{R}^1_x$ - независимое переменное,

$$I \in \{(a,\ b),\ (a,\ b],\ [a,\ b),\ [a,\ b]\},$$

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in D \subset \mathbb{R}^n_{\vec{y}} \qquad \forall x \in I, \qquad y_i(x) \in C^1(I),\ i=\overline{1,\ n},$$

$$G = I \times D \subset \mathbb{R}^{1+n}_{x,\ \vec{y}},$$

$$\vec{f}(x,\ \vec{y})=\begin{pmatrix} f_1(x,\ \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\ \vec{y}) \end{pmatrix}, \qquad f_i(x,\ \vec{y}) \in C(G),\ i=\overline{1,\ n}.$$

Определение. Вектор-функция $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ называется решением СОДУ (1.1) на промежутке I, если

1^0 $\varphi_i(x) \in C^1(I),\ i=\overline{1,\ n}$,

2^0 $(x,\ \vec{\varphi}(x)) \in G \qquad \forall x \in I$,

3^0 $\dfrac{d}{dx}\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{f}(x,\ \vec{\varphi}(x))$.

Процесс нахождения решения (1.1) называется ***интегрированием*** СОДУ (1.1).

Всякое решение СОДУ (1.1) $\vec{\varphi}(x)$ можно геометрически интерпретировать, как кривую в $(n+1)$- мерном пространстве $(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$, которая называется ***интегральной кривой***.

Геометрическая интерпретация:

- в $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$ задано "поле направлений",
- интегральная кривая СОДУ (1.1) - касательная к которой в каждой точке имеет заданное направление.

Определение. ***Задачей Коши (начальной задачей)*** (ЗК) называется задача нахождения решения СОДУ (1.1), удовлетворяющему начальному условию (НУ)

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \tag{1.2}$$

где $x_0 \in I$, $(x_0, \vec{y}_0) \in I \times D = G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$.

Т.е. из всех интегральных кривых нам надо выделить ту, которая проходит через точку $(x_0, \vec{y}_0) \in I \times D = G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$.

Теорема 1.1. (существования и единственности).

Если

- $f_i(x, \vec{y}) \in C(G)$, $i = \overline{1, n}$ и
- $\dfrac{\partial f_i(x, \vec{y})}{\partial y_j} \in C(G)$, $i, j = \overline{1, n}$,

то $\forall$ точки $(x_0, \vec{y}_0) \in G$ $\exists U(x_0) \in I$, в которой существует единственное решение $\vec{y}(x)$: $U(x_0) \to D \subset \mathbb{R}^n_{\vec{y}}$ задачи Коши (1.1), (1.2).

!!! ЛОКАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР !!!

Полезно вспомнить.

Лемма 1.1. Пусть B -

- выпуклое по $\vec{y}$ [1],
- замкнутое множество,
- такое, что $B \subset G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\vec{y},x}$.

Если $\vec{f}(x, \vec{y})$: $\dfrac{\partial f_i(x, \vec{y})}{\partial y_j} \in C(B)$, $i, j = \overline{1, n}$, то $\vec{f} \in Lip_{\vec{y}}(B)$ [2].

Лемма 1.2. Если $\vec{f}(x, \vec{y}) \in C(G)$, то функция $\vec{y}(x) \in C^1(I)$ - решение задачи Коши (1.1), (1.2) $\Leftrightarrow$ когда она удовлетворяет интегральному уравнению (ИУ)

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi))d\xi, \tag{1.5}$$

$x \in I$, $x_0 \in I$.

Лемма 5.1 (Гронуолла о дифференциальном неравенстве).

Пусть скалярная функция $\varphi(x) \in C(I)$: $\varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

---

[1] для любых двух точек $(x, \vec{y}_1) \in B$ и $(x, \vec{y}_2) \in B$ и $\forall \theta \in [0, 1]$ точка $(x, \vec{y}_1 + \theta(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)) \in B$

[2] т.е. $\exists L = const > 0$: $\forall (x, \vec{y}_1) \in B$ и $\forall (x, \vec{y}_2) \in B$ справедливо $\left\| \vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2) \right\| \leq L \left\| \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \right\|$.
L - постоянная Липшица - число.

$\exists A = const > 0$ и $\exists B = const > 0$: $\forall x,\ x_0 \in I$ выполнено

$$\varphi(x) \le A + B\left|\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(\xi)d\xi\right|.$$

Тогда $\forall x \in I \ \ \varphi(x) \le Ae^{B|x-x_0|}$.

- -

Ведем в рассмотрение параметр $\vec{\mu} \in M \subset \mathbb{R}^m$, M - область,
и рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x,\ \vec{y},\ \vec{\mu}), & (6.1) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0(\vec{\mu}). & (6.2) \end{cases}$$

Если при каждом фиксированном значении параметра $\vec{\mu} \in M$
$\vec{f}(x,\ \vec{y},\ \vec{\mu}) \in C(G)$ и
$\forall (x,\ \vec{y}) \in G \ \ \dfrac{\partial f_i(x,\ \vec{y},\ \vec{\mu})}{\partial y_j} \in C(G),\ i,\ j = \overline{1,\ n}$,
то согласно **Теореме 1.1** (существования и единственности) существует решение задачи Коши (6.1) - (6.2) $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\ \vec{\mu})$.
Будем считать, что оно продолжено насколько это возможно.

Можно сказать, что решение задачи Коши (6.1) - (6.2) зависит от $n+m+2$ аргументов: $x,\ x_0,\ y_{01},\ \dots,\ y_{0n},\ \mu_1,\ \dots,\ \mu_m$.

Теорема 6.1 Пусть $\forall \vec{\mu} \in M$, $\forall (x,\ \vec{y}) \in G$

① $\vec{f}(x,\ \vec{y},\ \vec{\mu}) \in C(G \times M)$, $\dfrac{\partial f_i(x,\ \vec{y},\ \vec{\mu})}{\partial y_j} \in C(G \times M)$ $\ \forall i, j = \overline{1,n}$,

② $\vec{y}_0(\vec{\mu}) \in C(M)$,

③ $\vec{\mu}_0 \in M$ и $(x_0,\ \vec{y}_0(\vec{\mu}_0)) \in G$.

Тогда $\exists \delta > 0$ и $\exists \alpha > 0$:
решение задачи Коши (6.1) - (6.2) $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\ \vec{\mu})$ непрерывно на множестве $Q = \{|x - x_0| \le \delta,\ |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \le \alpha\}$.

○ Возьмем $\tilde{\alpha} > 0$ таким, что $S_0 = \{\vec{\mu} : |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \le \tilde{\alpha}\} \subset M$.

$\vec{\mu} = \vec{\mu}_0 + \Delta\vec{\mu}$, где $|\Delta\vec{\mu}| \le \tilde{\alpha}$.

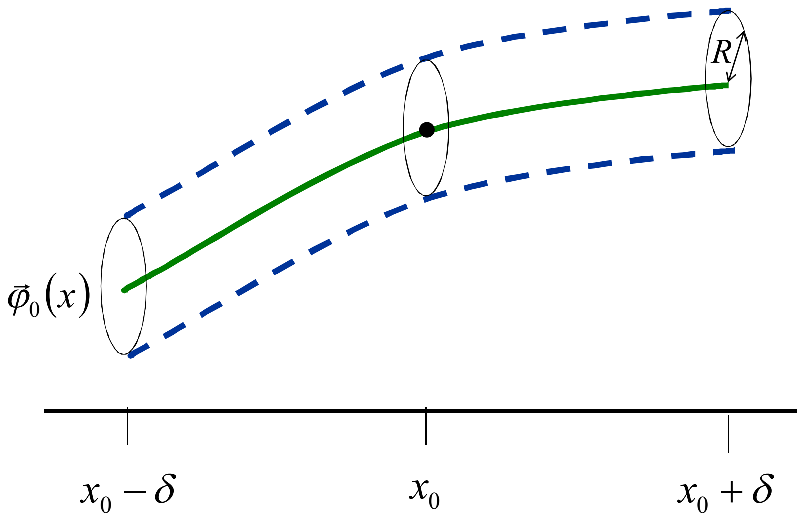
Возьмем $\delta > 0$ таким, что решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\ \vec{\mu}_0) \equiv \vec{\varphi}_0(x)$ определено на $I = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$.

При этом $\vec{\varphi}_0(x_0) = \vec{\varphi}(x_0,\ \vec{\mu}_0) = \vec{y}_0(\vec{\mu}_0)$.

Возьмем $R > 0$ таким, что $V = \{(x,\ \vec{y}) : x \in I,\ |\vec{y} - \vec{\varphi}_0(x)| \le R\} \subset G$.

Множество $W_0 = V \times S_0 \subset G \times M$

- ограничено,
- замкнуто,
- выпукло по $\vec{y}$.



Следовательно $\exists m>0$ и $\exists l>0$ постоянные такие, что в W_0

- $\left|\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu})\right| \le m$,
- $\left|\vec{f}(x,\vec{y}_1,\vec{\mu})-\vec{f}(x,\vec{y}_2,\vec{\mu})\right| \le l\left|\vec{y}_1-\vec{y}_2\right|$.

Введем обозначения

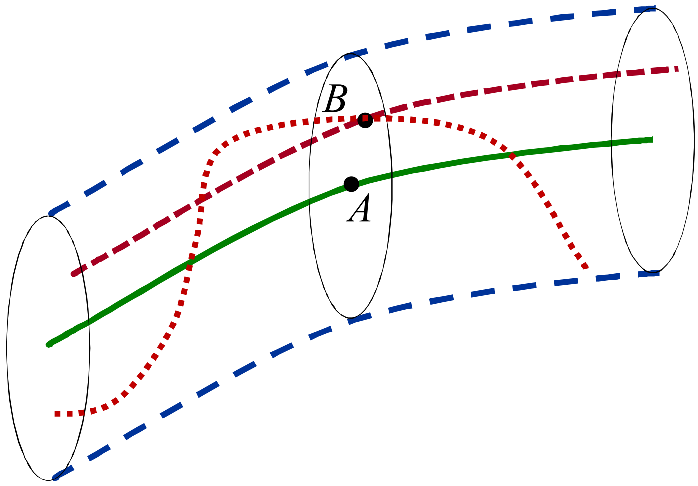
$$\omega=\omega(\Delta\vec{\mu})=\max_{\substack{(x,\vec{y},\vec{\mu})\in W_0\\(x,\vec{y},\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu})\in W_0}}\left|\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu})-\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu})\right|,$$

$$g_0=g_0(\Delta\vec{\mu})=\max_{\substack{\vec{\mu}\in S_0\\\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu}\in S_0}}\left|\vec{y}_0(\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu})-\vec{y}_0(\vec{\mu})\right|.$$

Из равномерной непрерывности $\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu})$ на W_0 и $\vec{y}_0(\vec{\mu})$ на S_0 следует, что

$$\omega(\Delta\vec{\mu})\xrightarrow[\Delta\vec{\mu}\to 0]{}0 \text{ и } g_0(\Delta\vec{\mu})\xrightarrow[\Delta\vec{\mu}\to 0]{}0. \qquad (6.3)$$

Если $\left|\vec{y}_0(\vec{\mu})-\vec{y}_0(\vec{\mu}_0)\right|<R$, то по построению $(x_0,\vec{y}_0(\vec{\mu}))\in V$, график решения $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\mu})$ проходит в V.



$$A = \left(x_{0,}\ \vec{\varphi}_0(x_0)\right) = \left(x_{0,}\ \vec{\varphi}(x_0,\ \vec{\mu}_0)\right) = \left(x_{0,}\ \vec{y}(x_0,\ \vec{\mu}_0)\right) = \left(x_{0,}\ \vec{y}_0(\vec{\mu}_0)\right)$$

$$B = \left(x_{0,}\ \vec{y}(x_0,\ \vec{\mu})\right) = \left(x_{0,}\ \vec{y}_0(\vec{\mu})\right)$$

Рассмотрим разность $\vec{u} = \vec{y} - \vec{\varphi}_0$ (ошибка).
Для нее получаем (уравнение эволюции ошибки)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{u} = \vec{f}(x,\ \vec{y},\ \vec{\mu}) - \vec{f}(x,\ \vec{\varphi}_0,\ \vec{\mu}_0), \\ \vec{u}(x_0) = \vec{y}_0(\vec{\mu}) - \vec{y}_0(\vec{\mu}_0). \end{cases}$$

По **лемме 1.2** $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\ \vec{\mu}) = \vec{y}_0(\vec{\mu}) + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu}),\ \vec{\mu})d\xi$.

Рассмотрим сначала разность двух решений $\vec{z} = \vec{y}(x,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{y}(x,\ \vec{\mu})$ (более общий случай) при $\vec{\mu} \in S_0 = \{\vec{\mu} : |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \le \tilde{\alpha}\}$, а потом используем полученный результат при $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$.

$$|\vec{z}| = |\vec{y}(x,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{y}(x,\ \vec{\mu})| = |\vec{\varphi}(x,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{\varphi}(x,\ \vec{\mu})| \le$$

$$\le |\vec{y}_0(x,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{y}_0(x,\ \vec{\mu})| + \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu}),\ \vec{\mu})| d\xi\right|^{3} \le$$

$$\le g_0(\Delta\vec{\mu}) + \left|\int\limits_{x_0}^{x} \left|\begin{matrix} \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu}) + \\ + \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu}) - \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu}),\ \vec{\mu}) \end{matrix}\right| d\xi\right| \le$$

$$\le g_0(\Delta\vec{\mu}) + \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}) - \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu})| d\xi\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}),\ \vec{\mu}) - \vec{f}(\xi,\ \vec{\varphi}(\xi,\ \vec{\mu}),\ \vec{\mu})| d\xi\right| \le$$

$$\le g_0(\Delta\vec{\mu}) + \left|\int\limits_{x_0}^{x} \omega(\Delta\vec{\mu}) d\xi\right| + \left|\int\limits_{x_0}^{x} l |\vec{z}(\xi,\ \vec{\mu})| d\xi\right| = g_0(\Delta\vec{\mu}) + \delta \cdot \omega(\Delta\vec{\mu}) + l \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{z}(\xi,\ \vec{\mu})| d\xi\right|.$$

---

[3] может быть как $x > x_0$, так и $x < x_0$.

Обозначив $g_0(\Delta\vec{\mu})+\delta\cdot\omega(\Delta\vec{\mu})=A>0$, $l=B>0$, получаем таким образом, что $|\vec{z}|\le A+B\left|\int\limits_{x_0}^{x}|\vec{z}(\xi,\,\vec{\mu})|d\xi\right|$, и по **лемме 5.1** (Гронуолла)

$$|\vec{z}|\le Ae^{B|x-x_0|}=\left(g_0(\Delta\vec{\mu})+\delta\cdot\omega(\Delta\vec{\mu})\right)e^{l|x-x_0|}\le\left(g_0(\Delta\vec{\mu})+\delta\cdot\omega(\Delta\vec{\mu})\right)e^{l\delta}\equiv F(\Delta\vec{\mu})\quad(6.4)$$

В силу (6.3) $F(\Delta\vec{\mu})\xrightarrow[\Delta\vec{\mu}\to0]{}0$.

Так как $\vec{\mu}$ - любое из S_0, то и для $\vec{\mu}=\vec{\mu}_0$ вышеприведенные выкладки справедливы, таким образом $\vec{u}\le F(\Delta\vec{\mu})$.

Область (трубка) V замкнутая и ограниченная по построению. Следовательно, решение $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\,\vec{\mu})=\vec{\varphi}(x,\,\vec{\mu}_0)+\vec{u}=\vec{\varphi}_0(x)+\vec{u}$ можно продолжить вплоть до выхода его графика на границу V (**Теорема 5.1** лекции 16).

Выберем теперь $\alpha:\ 0<\alpha<\tilde{\alpha}$ и $|\Delta\vec{\mu}|\le\alpha$ так, чтобы, например, $F(\Delta\vec{\mu})\le\frac{R}{10}$.

При $|\Delta\vec{\mu}|=|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0|\le\alpha$ график решения $\vec{y}=\vec{\varphi}_0(x)+\vec{u}$ не достигнет боковой поверхности трубки V, где $|\vec{y}-\vec{\varphi}_0(x)|=|\vec{u}|$, так как $\vec{u}\le F(\Delta\vec{\mu})\le\frac{R}{10}$.

Поэтому график решения $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\,\vec{\mu})$ пересекает границу области V лишь при $x=x_0+\delta$ и $x=x_0-\delta$, т.е. решение определено на всем I.

При $(x,\,\vec{\mu})\in Q=\{|x-x_0|\le\delta,\,|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0|\le\alpha\}$ для разности двух решений имеем

$$|\vec{\varphi}(x+\Delta x,\,\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu})-\vec{\varphi}(x,\,\vec{\mu})|\le|\vec{\varphi}(x+\Delta x,\,\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu})-\vec{\varphi}(x+\Delta x,\,\vec{\mu})|+$$
$$+|\vec{\varphi}(x+\Delta x,\,\vec{\mu})-\vec{\varphi}(x,\,\vec{\mu})|\le F(\Delta\vec{\mu})+m|\Delta x|\xrightarrow[\substack{\Delta x\to0\\ \Delta\vec{\mu}\to0}]{}0,$$

т.е. решение непрерывно на Q.

●

Замечание 6.1. Непрерывность решения можно получить следующим образом

- полагая $\vec{\mu}=\vec{y}_0$ можно получить непрерывность по $\vec{y}_0$;
- заменой $\tilde{x}=x-x_0$ получаем непрерывность по x_0.

Теорема 6.2 (дифференцируемость по параметру).

1. Пусть $\vec{f}(x,\,\vec{y},\,\vec{\mu})$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $\forall i,j=\overline{1,n}$, $\frac{\partial f_i}{\partial\mu_k}$, $\forall k=\overline{1,m}$ непрерывны $\forall(x,\,\vec{y})\in G$ и $\forall\vec{\mu}\in M$.
2. Пусть $\vec{y}_0(\vec{\mu})\in C^1(M)$.
3. Пусть $\vec{\mu}_0\in M$, $(x_0,\,\vec{y}_0(\vec{\mu}_0))\in G$.

Тогда $\exists\delta>0$ и $\exists\alpha>0$ такие, что решение $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\,\vec{\mu})$ задачи Коши (6.1), (6.2) непрерывно дифференцируемо по μ_k, $k=\overline{1,m}$ на множестве $Q=\{|x-x_0|\le\delta,\,|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0|\le\alpha\}$.

Производные $u_{ik} = \dfrac{\partial y_i}{\partial \mu_k}$ удовлетворяют ***системе уравнений в вариациях***

$$\frac{du_{ik}}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} u_{jk}\,, \tag{6.5}$$

и начальному условию

$$u_{ik}(x_0) = \frac{\partial y_{0i}}{\partial \mu_k}\,, \tag{6.6}$$

где $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$, производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial \mu_k}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ берутся в точках $(x,\, \vec{\varphi}(x,\, \vec{\mu}),\, \vec{\mu})$.

Замечание 6.2. Если $\vec{\mu} = \vec{y}_0$ $(m = n)$, то система (6.5)-(6.6) принимает вид

$$\frac{du_{ik}}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} u_{jk}$$

$$u_{ik}(x_0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Замечание 6.3. Систему (6.5)-(6.6) можно не запоминать - она получается из (6.1) - (6.2) посредством дифференцирования по $\vec{\mu}$.

При этом считаем, что $\vec{y} = \vec{y}(x,\, \vec{\mu})$ и обозначаем $u_{ik} = \dfrac{\partial y_i}{\partial \mu_k}$.

○ Согласно **теореме 6.1** $\exists \delta > 0$ и $\exists \alpha > 0$: решение задачи Коши (6.1) - (6.2) $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\, \vec{\mu})$ непрерывно на множестве $Q = \{|x - x_0| \le \delta,\, |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \le \alpha\}$.

Так как при вычислении $\dfrac{\partial}{\partial \mu_k}$ значения всех остальных параметров зафиксированы, то можно считать, что $m = 1$, а $\mu = \mu_k$.

Для удобства введем обозначения

$$\tilde{\mu} = \mu + \Delta\mu\,,$$
$$\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\, \mu),$$
$$\tilde{\vec{y}} = \vec{\varphi}(x,\, \tilde{\mu}) = \vec{\varphi}(x,\, \mu + \Delta\mu),$$
$$\Delta\vec{y} = \tilde{\vec{y}} - \vec{y}\,,$$
$$\Delta\vec{f} = \vec{f}(x,\, \tilde{\vec{y}},\, \tilde{\mu}) - \vec{f}(x,\, \vec{y},\, \mu).$$

Для $\vec{v}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \dfrac{\Delta\vec{y}}{\Delta\mu}$ получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{v}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \dfrac{\Delta\vec{f}}{\Delta\mu}, \\ \vec{v}(x_0,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \vec{v}_0(\mu,\, \tilde{\mu}) = \dfrac{\vec{y}_0(\tilde{\mu}) - \vec{y}_0(\mu)}{\Delta\mu}. \end{cases} \tag{6.7}$$

Положим

$$\bar{y}^* = \bar{y} + s\Delta\bar{y},$$
$$\mu^* = \mu + s\Delta\mu,$$
$$\vec{F}(s) = \vec{f}(x,\, \bar{y}^*,\, \mu^*).$$

Тогда

$$\Delta\vec{f} = \vec{F}(1) - \vec{F}(0) = \int_0^1 \vec{F}'(s)ds = \int_0^1 \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y}^*,\, \mu^*)}{\partial\bar{y}}\Delta\bar{y}ds + \int_0^1 \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y}^*,\, \mu^*)}{\partial\mu}\Delta\mu ds.$$

Здесь $\frac{\partial\vec{f}}{\partial\bar{y}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right),\ i,\ j = \overline{1,n}$ - квадратная матрица порядка n.

Обозначим

$$H(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y}^*,\, \mu^*)}{\partial\bar{y}}ds \text{ - матрица,}$$

$$\vec{h}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y}^*,\, \mu^*)}{\partial\mu}ds \text{ -вектор.} \qquad (6.8)$$

$$\Delta\vec{f} = H(x,\, \mu,\, \tilde{\mu})\Delta\bar{y} + \vec{h}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu})\Delta\mu.$$

В этих обозначениях задача (6.7) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\bar{v}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = H(x,\, \mu,\, \tilde{\mu})\bar{v} + \vec{h}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}), \\ \bar{v}(x_0,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \bar{v}_0(\mu,\, \tilde{\mu}). \end{cases} \qquad (6.9)$$

Функция $\bar{v}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu})$ была определена при $\mu \neq \tilde{\mu}$.

При $\mu = \tilde{\mu}$ имеем $\tilde{\bar{y}} = \bar{\varphi}(x,\, \mu) = \bar{y}$, подынтегральные выражения в (6.8) не зависят от s.

Тогда можем доопределить по непрерывности при $\mu = \tilde{\mu}$

$$\bar{v}_0(\mu,\, \mu) = \frac{\partial\bar{y}_0(\mu)}{\partial\mu},$$

$$H(x,\, \mu,\, \mu) = \left(\frac{\partial f_i(x,\, \bar{y},\, \mu)}{\partial y_j}\right),\ i,\ j = \overline{1,n},$$

$$\vec{h}(x,\, \mu,\, \mu) = \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y},\, \mu)}{\partial\mu}.$$

По **теореме 6.1** решение (6.9) непрерывно зависит от $\tilde{\mu}$:

$$\bar{v}(x,\, \mu,\, \mu) = \lim_{\tilde{\mu}\to\mu}\bar{v}(x,\, \mu,\, \tilde{\mu}) = \frac{\partial\bar{y}}{\partial\mu} = \frac{\partial\bar{y}}{\partial\mu_k} = \vec{u}_k(x,\, \mu),$$

где $\vec{u}_k(x,\, \mu) = \begin{pmatrix} u_{1k}(x,\, \mu) \\ \vdots \\ u_{nk}(x,\, \mu) \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d}{dx}\vec{u}_k(x,\, \mu) = \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y},\, \mu)}{\partial\bar{y}}\vec{u}_k(x,\, \mu) + \frac{\partial\vec{f}(x,\, \bar{y},\, \mu)}{\partial\mu} \qquad (6.10)$$

и НУ

$$\vec{u}_k(x_0,\,\mu)=\frac{\partial\vec{y}_0(\mu)}{\partial\mu}. \qquad (6.11)$$

Так как система (6.10) линейная, то решение ЗК (6.10) - (6.11) определено на всем Q.

По теореме 6.2 оно непрерывно в Q.

●

Пример 6.1.[4] $y' = y + y^2 + xy^3$, $y(2) = y_0$.

Найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

□ Обозначим для удобства применения **теоремы 6.2** (дифференцируемость по параметру) $\mu = y_0$. Тогда для решения задачи Коши $\begin{cases} y' = y + y^2 + xy^3, \\ y(2) = \mu \end{cases}$ надо найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

$f(x,\,y,\,\mu) = y + y^2 + xy^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2y + 3xy^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mu} = 0$ - непрерывны; $x_0 = 2$;

$u = \dfrac{\partial y}{\partial \mu}$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial y}u = \left(1 + 2y + 3xy^2\right)u \qquad \text{(ув)}$$

и начальному условию

$$u(2) = \frac{\partial y_0}{\partial \mu} = 1.$$

Причем в (ув) y решение исходной задачи при $\mu = 0$, то есть

$$\begin{cases} y' = y + y^2 + xy^3, \\ y(2) = 0. \end{cases} \qquad \text{(ЗК0)}$$

Нетрудно заметить, что $y = 0$ является решением (ЗК0).

В силу непрерывности $f(x,\,y,\,\mu) = y + y^2 + xy^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2y + 3xy^2$ согласно **теореме 5.1** (существования и единственности) (лекция 15) решение (ЗК0) единственно.

Т.о., $\begin{cases} u' = u, \\ u(2) = 1, \end{cases}$ т.е. $u(x) = Ce^x$, где $Ce^2 = 1$.

И $\boxed{\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = e^{x-2}}$.

■

---

[4] Ф 1066