Лекция 9.

Гл. II. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

§3. Выделение вещественных решений[1].

$x \in R$, а $y = y(x)$ может быть комплексной функцией вещественного аргумента.

Множество комплексных чисел обозначается через C[2].

Комплексное число $z = \alpha + i\beta \in C$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha = Re\, z$ - вещественная часть z, $\beta = Im\, z$ - мнимая часть z, i - мнимая единица.

Два комплесных числа $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ называются равными, если $\alpha_1 = Re\, z_1 = Re\, z_2 = \alpha_2$ и $\beta_1 = Im\, z_1 = Im\, z_2 = \beta_2$.

🕮 Половинкин "Курс лекций по ТФКП".

Определение. Евклидово пространство R^2, в котором введено произведение по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

называется ***множеством*** (или пространством) ***комплексных чисел*** C. Элементы множества C называются ***комплексными числами***.

Пример 2.1. $z_1 = i, z_2 = i, z_1 \cdot z_2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1$. ■

$y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, т.е. $\lambda = \alpha + i\beta$. Возникает вопрос, чему равно y?

Если $z = \alpha + i\beta \in C$, то сопряженное комплексное число $\overline{z} = \alpha - i\beta \in C$.

В дальнейшем будут полезны следующие свойства сопряженных чисел:[3]

$$\overline{\overline{z}} = z,$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Определение.[4] Для $z \in C$ положим

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

---

[1] ориентировано на поток Бесова

[2] О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу. Часть I. §9.3

[3] Там же.

[4] О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу. Часть I. §17.4

$$cos\, z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

В курсе математического анализа было показано, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

и

$e^{iz} = cos\, z + i\, sin\, z.$

Также было доказано, что[5]

Если $P_n(z)$ - полином с действительными коэффициентами, и $z_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, его корень кратности m, то $\overline{z_0} = \alpha - i\beta$ также является его корнем кратности m.

Итак, $x \in R$, $y(x) \in C$.

Представим $y(x)$ в виде

$y(x) = u(x) + iv(x).$

Здесь $u(x) = Re\, y\,(x)$, $v(x) = Im\, y\,(x)$.

Пример 2.2. $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, т.е. $\lambda = \alpha + i\beta$. Выделить вещественную $u(x)$ и мнимую $v(x)$часть $y(x)$.

□ $y = e^{\lambda x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x).$

Тогда $u(x) = e^{\alpha x} cos\,\beta\, x$, $v(x) = e^{\alpha x} sin\,\beta\, x.$

■

Понятие производной комплексной функции вводится аналогично понятию производной функции в вещественном пространстве:

$f^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$

Отсюда

$y^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u^{'}(x) + iv^{'}(x),$

$y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x).$

Пример 2.3. $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, т.е. $\lambda = \alpha + i\beta$. Найти $y^{'}(x)$.

□ $y' = \frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}[e^{\alpha x}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x)] = \frac{d}{dx}(e^{\alpha x} cos\,\beta\, x) + i \frac{d}{dx}(e^{\alpha x} sin\,\beta\, x) =$
$= \underline{\alpha e^{\alpha x} cos\,\beta\, x} - \beta e^{\alpha x} sin\,\beta\, x + i\alpha e^{\alpha x} sin\,\beta\, x + \underline{i\beta e^{\alpha x} cos\,\beta\, x} = = (\alpha +$
$i\beta) e^{\alpha x} cos\,\beta\, x + (-\beta + i\alpha) e^{\alpha x} sin\,\beta\, x = (\alpha + i\beta) e^{\alpha x} cos\,\beta\, x + i(\alpha +$
$i\beta) e^{\alpha x} sin\,\beta\, x = = (\alpha + i\beta) e^{\alpha x}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x) = \lambda e^{\lambda x}.$

■

Лемма 3.1. (Выделение вещественных решений.)

Если коэффициенты ЛОДУ (1.3а)

$Ly = 0$ (1.3а)

вещественны,

и $y(x)$ - его комплексное решение,

то $u(x) = Re\, y\,(x)$ и $v(x) = Im\, y\,(x)$ также являются решениями (1.3а).

○ $y(x) = u(x) + iv(x).$

[5] О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу. Часть I. §9.4: лемма 1.

$M(D)y(x) = 0$.
С другой стороны
$0 = M(D)y(x) = M(D)u(x) + iM(D)v(x)$.
Следовательно, $M(D)u(x) = 0$ и $M(D)v(x) = 0$.
●

Замечание 3.1. Если $y_1(x) \in C$ - решение (1.3a), то $y_2(x) = \overline{y_1}(x)$ также решение (1.3a).
Замена базиса в пространстве решений (ФСР) на вещественный
$\tilde{y}_1(x) = \frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}$, $\tilde{y}_2(x) = \frac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}$.

§4. Неоднородные ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

$$Ly = f(x) \tag{4.1}$$

ФСР находить уже умеем.
Методы нахождения частного решения:
1. метод вариации постоянных (лекция 7),
2. метод неопределенных коэффициентов (лекция 9).

Метод неопределенных коэффициентов позволяет найти частное решение ЛОДУ (4.1) без квадратур в случае, когда
$f(x) = e^{\mu x} P_s(x)$ -
квазиполином.

Замечание 4.1. $f(x) = e^{\alpha x} P_l(x) \cos\beta x$ тоже можно трактовать как квазиполином:
$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i}}{2}$,
$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
где
$f_1(x) = P_l(x) \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{2}$,
$f_2(x) = P_l(x) \frac{e^{(\alpha-i\beta)x}}{2}$.
!!! Коэффициенты $P_l(x)$ вещественны !!!
Для $f(x) = e^{\alpha x} P_l(x) \sin\beta x$ аналогично.

Теорема 4.1. Пусть правая часть (4.1) квазиполином вида $f(x) = e^{\mu x} P_s(x)$,
$\mu = const \in C$,
$P_s(x) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j x^{s-j}$, $\alpha_0 \neq 0$ - полином степени s.
Тогда существует частное решение (4.1), имеющее вид

$$y_{част}(x) = e^{\mu x} x^{m_l} Q_s(x), \tag{4.2}$$

где m_l - кратность корня характеристического уравнения (2.3) $\mu = \lambda_l$:

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = 0. \tag{2.3}$$

Замечание 4.2. Если μ является корнем характеристического уравнения (2.3), то говорят, что имеет место ***резонансный случай***.
Если μ не корень (2.3), то - ***нерезонансный случай***.

Замечание 4.3. Теорему докажем в резонансном случае, так как при отсутствии резонанса можно просто положить $m_l = 0$ в ходе доказательства.

○ Положим $Q_s(x) = \sum_{j=0}^{s} q_j x^{s-j}$, где $q_j = const \in R$ - произвольные (неопределенные) коэффициенты.

Подставим (4.2) в (4.1):

$$M(D)[e^{\mu x} x^{m_l} Q_s(x)] = e^{\mu x} P_s(x). \qquad (4.4)$$

<u>Задача</u>: убедиться, что из (4.4) можно последовательно определить пока неизвестные коэффициенты q_j, $j = \overline{0, s}$.

$$M(D) = \prod_{j=1}^{p} (D - \lambda_j)^{m_j} = (D - \lambda_l)^{m_l} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p} (D - \lambda_j)^{m_j} = (D - \lambda_l)^{m_l} M_1(D),$$

$$\sum_{l=1}^{p} m_l = n.$$

$$P_s(x) = \alpha_0 x^s + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j x^{s-j} = \alpha_0 x^s + P_{s-1}(x),$$

$$Q_s(x) = q_0 x^s + Q_{s-1}(x).$$

$$M(D)[e^{\mu x} x^{m_l} Q_s(x)] = M(D)[e^{\mu x} q_0 x^{s+m_l}] + M(D)[e^{\mu x} x^{m_l} Q_{s-1}(x)].$$

По **лемме 2.1** (формула сдвига) лекции 8:

❶ $M(D)[e^{\mu x} q_0 x^{s+m_l}] = e^{\mu x} M(D+\mu)[q_0 x^{s+m_l}] = e^{\mu x} \left(D + \underbrace{\mu - \lambda_l}_{=0}\right)^{m_l} M_1(D + \mu)[q_0 x^{s+m_l}] = = e^{\mu x} q_0 M_1(D+\mu) D^{m_l}[x^{s+m_l}] = e^{\mu x} q_0 M_1(D+\mu) \frac{(s+m_l)!}{s!} x^s = = e^{\mu x} q_0 \frac{(s+m_l)!}{s!} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p} (D + \mu - \lambda_j)^{m_j} x^s = e^{\mu x} q_0 \frac{(s+m_l)!}{s!} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p} (\mu - \lambda_j)^{m_j} x^s + e^{\mu x} \hat{Q}_{s-1}(x).$

❷ $M(D)[e^{\mu x} x^{m_l} Q_{s-1}(x)] = M(D)\left[e^{\mu x} \tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right] = e^{\mu x} M(D+\mu)\left[\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right] = = e^{\mu x} (D + \mu - \lambda_l)^{m_l} M_1(D+\mu)\left[\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right] = e^{\mu x} M_1(D + \mu) D^{m_l}\left[\tilde{Q}_{m_l+s-1}(x)\right] = = e^{\mu x} M_1(D+\mu) \tilde{\tilde{Q}}_{s-1}(x) = e^{\mu x} Q*_{s-1}(x).$

(4.4) принимает вид:

$$e^{\mu x} q_0 \frac{(s+m_l)!}{s!} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p} (\mu - \lambda_j)^{m_j} x^s + e^{\mu x} \left(\hat{Q}_{s-1}(x) + Q*_{s-1}(x)\right) = e^{\mu x}\left(\alpha_0 x^s + P_{s-1}(x)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при x^s слева и справа, находим q_0:

$$q_0 \frac{(s+m_l)!}{s!} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{p} (\mu - \lambda_j)^{m_j} = \alpha_0.$$

Перенесем все слагаемые, содержащие q_0 в правую часть (4.4)

$$e^{\mu x} q_0 M_1(D+\mu) \frac{(s+m_l)!}{s!} x^s + M(D)[e^{\mu x} x^{m_l} Q_{s-1}(x)] = e^{\mu x} P_s(x) \rightarrow$$

$$M(D)[e^{\mu x} x^{m_l} Q_{s-1}(x)] = e^{\mu x} P_{s-1}(x) - e^{\mu x} q_0 M_1(D+\mu) \frac{(s+m_l)!}{s!} x^s = e^{\mu x} P_{s-1}(x) - e^{\mu x} \hat{Q}_{s-1}(x) = = e^{\mu x} \tilde{P}_{s-1}(x).$$

Продолжая процесс, последовательно находим все остальные коэффициенты.

●

§5. Уравнение Эйлера.

Идея: Если с помощью замены сумеем ЛДУ с переменными коэффициентами преобразовать в ЛДУ с постоянными коэффициентами, то решив последнее, с помощью обратного преобразования найдем решение исходного ЛДУ в элементарных функциях.

Пример 5.1. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0,\ x\in(-1,1)$.

□ Замена $x=\cos\phi$:

$dx=-\sin\phi\, d\phi$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{dx}=\frac{-1}{\sin\phi}\frac{dy}{d\phi}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{-1}{\sin\phi}\frac{dy}{d\phi}\right)=\frac{-1}{\sin^3\phi}\cos\phi\frac{dy}{d\phi}+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{d^2y}{d\phi^2}$.

Подставляя найденные значения производных в исходное ОДУ, получаем

$$(1-\cos^2\phi)\left(\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{d^2y}{d\phi^2}-\frac{1}{\sin^3\phi}\cos\phi\frac{dy}{d\phi}\right)-\cos\phi\left(\frac{-1}{\sin\phi}\frac{dy}{d\phi}\right)+n^2y=0$$

или (после упрощения)

$\frac{d^2y}{d\phi^2}+n^2y=0$ - ЛОДУ с постоянными коэффициентами, однородное (умеем решать).

Характеристическое уравнение $\alpha^2+n^2=0$,

$\alpha^2+n^2=0$,

вещественная ФСР $y_1=\cos(n\phi)$, $y_2=\sin(n\phi)$.

Возвращаясь к старой переменной $x=\arccos\phi$, $y_1=\cos(n\arccos\phi)$, $y_2=\sin(n\arccos\phi)$.

$T_n(x)=\cos(n\arccos\phi)$ - полином Чебышева.

■

В вышеприведенном примере усмотреть замену непосредственно нельзя, но есть один тип ОДУ, где такая замена может быть всегда указана:

$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\,(\alpha\tilde{x}+\beta)^{n-k}\tilde{y}^{(n-k)}(\tilde{x})=\tilde{f}(\tilde{x}),\ \tilde{a}_k=const\in R$ - (5.1)

общий вид уравнения Эйлера.

Замена $x=\alpha\tilde{x}+\beta$ с последующей нормировкой приводит (5.1) к виду

$\sum_{k=0}^{n}a_k\,x^{n-k}y^{(n-k)}(x)=f(x),\ a_k=const\in R,\ a_0=1$. (5.2)

Определение. Уравнением ***Эйлера*** называют ОДУ вида(5.2).

Замечание 5.1. При замене x на Cx, $C=const$ ОДУ (5.2) не меняется.

Т.о. замена $\begin{cases}y=y,\\ t=\ln x\end{cases}$ приведет уравнение Эйлера к инвариантному относительно сдвига виду, т.е. не содержащему независимого переменного t.

Замечание 5.2. ОДУ (5.2) при замене $x = e^t$ останется линейным, но станет уже ОДУ с ПостК (не содержит t).

Замечание 5.3. При $x = 0$ особенность. $x = e^t > 0$, при $x < 0$ замена $x = -e^t < 0$.

Наряду с обозначением оператора дифференцирования (Лекция 7) по переменной x

$$D = \frac{d}{dx}$$

вводим в рассмотрение обозначение оператора дифференцирования по новой переменной t

$$T = \frac{d}{dt}$$

и полином по α степени k

$q_k(\alpha) = \prod_{m=0}^{k-1}(\alpha - m), m \in N.$