

1. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые: $3(y)^4 + 4[(y')^3 + y + x] = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $y' - y = y^3 + xy^4$, $y(1) = \mu$, где μ – параметр. Найдите $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений $x, x^2 - 1$.
3. Найти все решения уравнения $x^2(x+2)^2 y'' - x(x^2 - 4)y' + x(x-2)y = 5(x+2)^3 \ln^3 x$.

3. Вариационное исчисление

1. Функционал.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^\pi [e^{2x} y^2 + e^{2x} y y' + 2(y')^2 - 4y' \cos x] dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:
 $J(y) = \int_{7\pi/4}^{11\pi/6} (y')^2 \operatorname{tg} x dx$, $y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\ln 2$, $y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -2 \ln 2$.

4. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены независимого переменного.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $y'' + \frac{a}{x^2} y = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?



2. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые: $2y' - 2 \ln y' + y - x = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' - 2xy = 6e^{\mu x^2} y$, $y(-1) = 2 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x, \ln x$.
3. Найти все решения уравнения $x^2 y'' - x(8x - 1)y' + 4x(4x - 1)y = (4 - x)e^{4x}$, $x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Непрерывный функционал.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^{\pi/2} [y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + (y')^2 + 2y' \sin x] dx$, $y(0) = 1$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_{4\pi/3}^{3\pi/2} (y')^2 \sin x dx$, $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ln 3$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

4. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены искомой функции.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 2y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $5(x + 1)^2 y'' + y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

3. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые: $5(y')^6 = 6[(y)^5 + y - x]$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^3 y' + x^2 y + \frac{1}{1 + \mu x^4 y^2} = 0$, $y(1) = 1 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений.
2. Найти определитель Вронского системы функций $e^x, xe^x, x^2 e^x$; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найти все решения уравнения $x(x-1)^2 y'' - (x^2-1)y' + (x+1)y = \frac{(x-1)^3}{x \ln^2 x}$, $x > 1$.

3. Вариационное исчисление

1. Линейный функционал.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^2 [4e^{2x}y + 6e^{2x}y' - 4y^2 - (y')^2] dx$, $y(2) = 3e^4$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_{2\pi/3}^{5\pi/6} (y')^2 \operatorname{ctg} x dx$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln 3$.

4. Теорема Штурма

1. Инвариант линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Пусть x_1, x_2, \dots – последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 3$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{3}{(x^2+1)}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.

✂

4. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Решить уравнения, найти особые решения, нарисовать интегральные кривые:
 $y'(y - x - \ln y) = 1$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' + 3xy + 2 = \sin \mu x^2 y^2$, $y(-1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная матрица линейной однородной системы уравнений.
2. Решить уравнение $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0$, зная его частное решение $y(x) = x$.
3. Найти все решения уравнения $x^2(x+1)y'' - x(3x+4)y' + 2(2x+3)y = \frac{2x^4 \ln(x+1)}{x+1}$, $x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Первая вариация функционала.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^4 \left[5y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}y^2 - \sqrt{x}(y')^2 \right] dx$, $y(1) = 2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:
 $J(y) = \int_{11\pi/6}^{2\pi} (y')^2 \cos x dx$, $y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\ln 3}{2}$, $y(2\pi) = 0$.

4. Теорема Штурма

1. Лемма о линейной зависимости нетривиальных решений линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 4y = 0$.
3. Доказать, что каждое решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на $(0, \infty)$.

5. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для n-го порядка в нормальном виде.
2. Найдите все решения уравнения $4y' - 2 \ln 2 y' = x - 2y$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' + 2xy = \frac{1}{1 + \mu x^2 y^2}$, $y(1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x^2 + 2x, 3x^2 - 1, x + 4$.
3. Найдите все действительные решения уравнения $x^2(\operatorname{sh} x)y'' - x(2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x)y' + (2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x)y = x^4 \operatorname{sh}^2 x, x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Локальный экстремум функционала.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 - 8e^x y - 8xe^x y'] dx, y(1) = e$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^\pi [e^{2x} y^2 + e^{2x} y y' + 2(y')^2 - 4y' \cos x] dx, y(0) = 0$.

4. Теорема Штурма

1. Лемма о кратности нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 5y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Найти расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ при $x \rightarrow \infty$.



6. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
2. Найдите все решения уравнения $(y')^2 - 4y' = 8x - 4y$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $y' - y = y^3 + xy^4$, $y(1) = \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейной однородной системы уравнений.
2. Найти определитель Вронского системы функций $10, \arcsin x, \arccos x$; $I = (-1, 1)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найдите все действительные решения уравнения $(\cos x)y'' + (\sin x - \cos x)y' - (\sin x)y = 2e^x \cos^2 x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Вариационное исчисление

1. Понятие слабого и сильного экстремума для функционала.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^{e^2} \left(x(y')^2 + \frac{1}{x}y^2 - 2y' - 2\frac{\ln x}{x}y\right) dx$, $y(1) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^e [y^2 + 2xyy' - x(y')^2 + 2xy'] dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = e$.

4. Теорема Штурма

1. Лемма о количестве нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка на замкнутом промежутке.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 6$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Доказать, что при $b(x) \neq 0$ нули функции $y(x)$ (если они существуют) и нули ее производной строго перемежаются.

7. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Принцип сжимающих отображений.
2. Найдите все решения уравнения $y' - \ln y' = y - x + 1$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' - 2xy = 6e^{\mu x^2} y$, $y(-1) = 2 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений x, e^{-2x} .
3. Найдите все действительные решения уравнения $x^2(ch x)y'' - x(2ch x + xsh x)y' + (2ch x + xsh x)y = x^4 ch^2 x, x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Необходимое условие экстремума.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^2 (2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y)dx, y(1) = 2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + (y')^2 + 2y' \sin x]dx, y(0) = 1$.

4. Теорема Штурма

1. Определение колеблющегося решения.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 7y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $x^2 y'' + ay = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?



8. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Продолжение, сужение, стыковка решений.
2. Найдите все решения уравнения $(y')^2 - 2y' = 4y - 4x - 2$, исследуйте особые решения и начертите интегральные кривые.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^3 y' + x^2 y + \frac{1}{1 + \mu x^4 y^2} = 0$, $y(1) = 1 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейной неоднородной системы уравнений.
2. Показать, что если $\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)} \equiv \text{const}$ на $I = (a, b)$, то функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ линейно зависимы на I .
3. Найдите все действительные решения уравнения $(\sin x)y'' + (\sin x - \cos x)y' - (\cos x)y = 2e^{-x} \sin^2 x$, $x \in (0; \pi)$.

3. Вариационное исчисление

1. Основная лемма вариационного исчисления.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^2 (3x^4 (y')^2 - 34x^3 y y' + 3x^2 y^2 - 84x^3 y) dx$, $y(2) = 10$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^e [2xy^2 + 2x^2 y y' - x(y')^2 - y' + 2y] dx$, $y(1) = -1$, $y(e) = e$.

4. Теорема Штурма

1. Определение неколеблющегося решения.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 8y = 0$ может содержаться на отрезке $[-2, 1]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $5y'' + \frac{1}{(x+1)^2} y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

9. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Непродолжаемое решение.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(6x + 6y)^5 = y'(y' + 6)^5$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' + 3xy + 2 = \sin \mu x^2 y^2$, $y(-1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Найти определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x$; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Решить уравнение: $(x + 1)y'' - 3(2x + 1)y' + 9xy = 2e^{4x}$.

3. Вариационное исчисление

1. Допустимая функция.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^4 \left(\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) y^2 + 2yy' \ln x - 4(y')^2 - 10y \right) dx$, $y(4) = -1$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx$, $y(1) = 2$, $y(4) = -5$.

4. Теорема Штурма

1. Теорема Штурма.
2. Пусть x_1, x_2, \dots – последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 9$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $\frac{1}{3}y'' + \frac{1}{(x^2+1)}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.



10. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема о продолжении решения в замкнутой ограниченной области.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $y'(y' + 4)^3 + (4x + 4y)^3 = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' + 2xy = \frac{1}{1 + \mu x^2 y^2}$, $y(1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Определитель Вронского для линейной системы уравнений.
2. Решить уравнение $y'' + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4}{2x+1}y = 0$, зная его частное решение $y(x) = x$.
3. Решить уравнение $xy'' - (x + 3)y' + \left(1 + \frac{3}{x}\right)y = \frac{x^3 e^x}{x-1}$ ($x > 1$).

3. Вариационное исчисление

1. Допустимое приращение.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^2 \left(y' \sin y + \frac{(y')^4}{x^3} \right) dx$, $y(1) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx$, $y(1) = 2$, $y(4) = -5$.

4. Теорема Штурма

1. Теорема сравнения.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 10y = 0$.
3. Доказать, что каждое решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на $(0, \infty)$.

11. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Теорема о продолжении решения на весь заданный интервал.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(2y - 2x)^5 + y'(y' - 6)^5 = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $y' - y = y^3 + xy^4$, $y(1) = \mu$, где μ – параметр. Найдите $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Определитель Вронского для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $\ln x^4$, $\ln 5x$, 11 .
3. Решить уравнение $(x + 3)y'' + 2(2x + 7)y' + 4(x + 4)y = xe^{-3x}$.

3. Вариационное исчисление

1. Простейшая задача вариационного исчисления.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 4y^2 + 8ye^{2x}) dx$, $y(1) = 2e^2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_{1/4}^1 \left(\frac{11y^2}{x^2} - \frac{25yy'}{x} - 2(y')^2 - \frac{5y}{x^3} \right) dx$, $y\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $y(1) = -1$.

4. Теорема Штурма

1. Следствие теоремы сравнения.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 11y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Найти расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$ при $x \rightarrow \infty$.



12. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Лемма Гронуолла.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $y'(y' - 4)^3 = (y - x)^3$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' - 2xy = 6e^{\mu x^2} y$, $y(-1) = 2 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Метод Лагранжа вариации постоянных.
2. Найти определитель Вронского системы функций $x^2, x|x|$; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Решить уравнение $(x^3 + 2x^2)y'' + 2xy' - 2y = \frac{(x+2)^2}{x}$ ($x > 0$).

3. Вариационное исчисление

1. Уравнение Эйлера.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_{-2}^{-1} (2yy' - x^2(y')^2) dx$, $y(-2) = \frac{3}{2}$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - \frac{7y^2}{x^2} - (y')^2 - \frac{12y}{x} \right) dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = -1$.

4. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены независимого переменного.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 12$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение уравнения $y'' + a(x)y' + y = 0$. Доказать, что нули функции $y(x)$ (если они существуют) и нули ее производной строго перемежаются.

13. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Точка существования решения.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(y')^2 - y + \frac{4}{x}y' = 2 \ln x - \frac{4}{x^2}$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^3y' + x^2y + \frac{1}{1+\mu x^4 y^2} = 0$, $y(1) = 1 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Формула Лиувилля-Остроградского для линейной системы уравнений.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений $x, x^2 - 1$.
3. Решить уравнение $(3x - 4)y'' + (17 - 15x)y' + (12x - 4)y = \frac{(3x-4)^2}{x-1}e^x, x > \frac{4}{3}$.

3. Вариационное исчисление

1. Экстремаль.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} [-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y \sin^2 x] dx, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y \sin^2 x] dx, y(0) = \frac{4}{5}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.

4. Теорема Штурма

1. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены искомой функции.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 13y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $y'' + \frac{a}{x^2}y = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?



14. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Точка единственности решения.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $4y - 4y' + (y')^2 + 12 = 8x$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' + 3xy + 2 = \sin \mu x^2 y^2$, $y(-1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Формула Лиувилля-Остроградского для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x, \ln x$.
3. Решить уравнение $x(x^2 + 1)y'' - (x^2 + 5)y' + \frac{8}{x}y = \frac{2x^4}{x^2+1}$, $x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Допустимая экстремаль.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} (yy' - (y')^2 - y^2 - 4y' \cos^2 x) dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [-(y')^2 + 4yy' - y^2 + 4y \sin^2 x] dx$, $y(0) = \frac{4}{5}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{5}$.

4. Теорема Штурма

1. Инвариант линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 14y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 0]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $(x + 1)^2 y'' + \frac{1}{5}y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

15. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Точка единственности решения.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $(y')^2 - y + 2e^{-x}y' + e^{-2x} + e^{-x} = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2y' + 2xy = \frac{1}{1+\mu x^2y^2}$, $y(1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений.
2. Найти определитель Вронского системы функций e^x, xe^x, x^2e^x ; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Решить уравнение $(2x + 3)y'' + (8x + 10)y' + (6x + 3)y = \frac{(2x+3)^2}{x+1}e^{-x}$, $x > -1$.

3. Вариационное исчисление

1. Задача со свободными концами.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - 4yy' + y^2 + 4y \cos^2 x) dx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [(y')^2 - yy' + y^2 + 4y \cos^2 x] dx$, $y(0) = -\frac{6}{5}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$.

4. Теорема Штурма

1. Лемма о линейной зависимости нетривиальных решений линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 15$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $(x^2 + 1)y'' + 3y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.



16. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Особое решение.
2. Решить уравнения, найти особые решения, начертить интегральные кривые: $5x^3y' - 10x^2y + (y')^2 = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $y' - y = y^3 + xy^4$, $y(1) = \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Теорема существования и единственности задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Решить уравнение $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0$, зная его частное решение $y(x) = x$.
3. Решить уравнение $x(1 - x^2)y'' + (2x^2 - 5)y' + \left(\frac{8}{x} - 2x\right)y = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$.

3. Вариационное исчисление

1. ГУ на свободном конце.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - 4yy' + y^2 - 2y' \sin^2 x) dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $\int_0^{\pi/2} [(y')^2 - 4yy' + y^2 - 2y' \sin^2 x] dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

4. Теорема Штурма

1. Лемма о кратности нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 16y = 0$.
3. Доказать, что каждое решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на $(0, \infty)$

17. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Обыкновенная точка.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $3(y')^2 - 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2y' - 2xy = 6e^{\mu x^2}y$, $y(-1) = 2 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений.
2. Исследовать на линейную зависимость функции $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$.
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2y'' + (4x + 2x^2)y' + 2(1 + 2x)y = 2e^{-2x}$, $x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Случай n неизвестных функций.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^\pi [e^{2x}y^2 + e^{2x}yy' + 2(y')^2 - 4y' \cos x] dx$, $y(0) = 0$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:
 $J(y) = \int_1^2 \left[\frac{6y}{x} - x^3(y')^2 - xy^2 + 2x^2yy' \right] dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = -\frac{7}{4}$.

4. Теорема Штурма

1. Лемма о количестве нулей нетривиального решения линейного однородного уравнения 2-го порядка на замкнутом промежутке.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 17y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 2]$?
3. Найти расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ при $x \rightarrow \infty$.



18. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. p -дискриминантное множество.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $(y')^2 + 8xy' - 16x^2 - 16y = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^3y' + x^2y + \frac{1}{1+\mu x^4 y^2} = 0$, $y(1) = 1 - \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Найти определитель Вронского системы функций $10, \arcsin x, \arccos x; I = (-1, 1)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2y'' + (3x^2 - 2x)y' + (2 - 3x)y = -3x^3e^{-3x}, x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $\int_0^{\pi/2} [y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + (y')^2 + 2y' \sin x] dx, y(0) = 1$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_1^2 [2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y] dx, y(1) = 2, y(2) = 5$.

4. Теорема Штурма

1. Определение колеблющегося решения.
2. Пусть x_1, x_2, \dots – последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0; q(x) > 0; x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 18$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Пусть $y(x)$ – нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$. Доказать, что нули функции $y(x)$ и нули ее производной строго перемежаются.

19. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Связь особого решения и р-дискриминантной кривой.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $(y')^2 + 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2y' + 3xy + 2 = \sin \mu x^2 y^2$, $y(-1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Фундаментальная матрица линейной однородной системы уравнений.
2. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений x, e^{-2x} .
3. Найти все действительные решения уравнения $xy'' + (2 - 2x)y' + (-2 + x)y = -4e^x$.

3. Вариационное исчисление

1. Уравнение Эйлера-Пуассона.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^2 [4e^{2x}y + 6e^{2x}y' - 4y^2 - (y')^2] dx$, $y(2) = 3e^4$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения: $J(y) = \int_1^e [x^2(y')^2 - 10yy' + 12y^2 + (24 \ln x - 2)y] dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = -1 + e^3$.

4. Теорема Штурма

1. Определение неколеблющегося решения.
2. Найти расстояние между соседними нулями любого (нетривиального) решения уравнения $y'' + 19y = 0$.
3. Выяснить, при каких условиях решения уравнения Эйлера $x^2y'' + ay = 0$ являются колеблющимися на интервале $(0, \infty)$?

✂

20. ДУ 2курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $3(y')^2 + 8xy' + 16x^2 + 16y = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $x^2 y' + 2xy = \frac{1}{1 + \mu x^2 y^2}$,
 $y(1) = 1 + \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейной однородной системы уравнений.
2. Показать, что если $\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)} \equiv \text{const}$ на $I = (a, b)$, то функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ линейно зависимы на I .
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2 y'' - (x^2 + 4x)y' + 2(x + 3)y = 12x^4 e^{-2x}$, $x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Изопериметрическая задача.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_1^4 \left[5y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} y^2 - \sqrt{x}(y')^2 \right] dx$, $y(1) = 2$.
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:
 $J(y) = \int_1^2 \left[2yy' - x^2(y')^2 + 12x^2 y \right] dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 0$.

4. Теорема Штурма

1. Теорема сравнения.
2. Сколько нулей нетривиального решения уравнения $y'' + 20y = 0$ может содержаться на отрезке $[-1, 1]$?
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{1}{5(x+1)^2} y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ лишь конечное число нулей.

21. ДУ 2 курс 4 семестр 1 задание

1. Исследование задачи Коши. Особые решения

1. Постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Решить уравнение, найти особые решения, начертить интегральные кривые $27(y')^3 \cdot x^2 + 3xy' - y = 0$.
3. Функция $y = y(x, \mu)$ – решение задачи Коши $y' - y = y^3 + xy^4$, $y(1) = \mu$, где μ – параметр. Найдите $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1. Структура общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка в нормальном виде.
2. Найти определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x$; $I = (-\infty, +\infty)$. Какие выводы относительно линейной зависимости этих функций на I можно сделать по их определителю Вронского?
3. Найти все действительные решения уравнения $x^2 y'' + (4x + x^2)y' + 2(1 + x)y = e^x$, $x > 0$.

3. Вариационное исчисление

1. Условие связи.
2. Выписать уравнение Эйлера и поставить недостающее краевое условие: $J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 - 8e^x y - 8xe^x y'] dx$, $y(1) = e..$
3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения:
 $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [y^2 - (y')^2 + 6y \sin 2x] dx$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

4. Теорема Штурма

1. Следствие теоремы сравнения.
2. Пусть x_1, x_2, \dots - последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$; $q(x) > 0$; $x_1 \leq x < \infty$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 21$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.
3. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $\frac{(x^2+1)}{3}y'' + y = 0$ имеет на интервале $(0, \infty)$ бесконечное конечное число нулей.