С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Государственный квалификационный экзамен (ГКЭ) по математике проводится в Московском физико-техническом институте с 1998 года, когда в системе высшего образования была введена степень бакалавра.

Сначала ГКЭ проводился на IV курсе только в устной форме по полной программе высшей математики, изучаемой в течение трех лет: математический анализ, аналитическая геометрия и линейная алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного (ТФКП), уравнения математической физики (УМФ). Программа ГКЭ также включала вопросы по вычислительной математике, изучаемой на III курсе. Позже ГКЭ был перенесен на весенний семестр III курса. Из программы были исключены УМФ и вычислительная математика. С 2002 года ГКЭ проводится в два этапа: в письменной и устной форме. К этому времени ГКЭ был смещен в зимнюю сессию III курса. В программу входили только предметы, изучаемые на первых двух курсах. С 2010 года ГКЭ опять проводится в весеннюю сессию III курса, и письменный экзамен включает также задачи по теории функций комплексного переменного.

Данное пособие содержит два варианта задач письменной работы ГКЭ, проведенной в 2010/2011 учебном году. Все задачи снабжены ответами, приведены решения задач первого варианта.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ВАРИАНТ 1

1. Найдите производную функции $x^{\ln x}$.
2. Разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^4\right)$ функцию $\sin\left(\operatorname{arctg} x\right)$.
3. Найдите A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.
4. Укажите тип изолированной особой точки однозначного характера $z_0=0$ для функции $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$.
5. В интеграле $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 f\left(x,y\right)dy$ поменяйте пределы интегрирования, а также перейдите к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ двумя способами.
6. Найдите расстояние между прямой $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+2t,\\ z=1+2t\end{cases}$ и прямой, проходящей через точки $A\left(-4;1;-5\right)$ и $B\left(-2;2;-5\right)$. Система координат декартова прямоугольная.
7. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $3x_1^2+x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3$. Выпишите матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Укажите ранг и сигнатуру квадратичной формы.
8. Найдите общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases}x+2y+z=2,\\ 5x+y+4z=9,\\ 3x-3y+2z=5.\end{cases}$

   Укажите частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. Найдите асимптоты, координаты точек экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, постройте график функции $y = \dfrac{x^2}{2-x}$.

10. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{\frac{1}{x+\ln(1-x)}}$.

11. Вычислите интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\cos x^2 - 1}$.

12. Исследуйте на сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{cth}^{\alpha}\left(\sqrt{x^3}\right)dx}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln(1+x)}}$, $\alpha > 0$.

13. Функциональную последовательность $f_n(x) = \operatorname{ch} x \cdot \cos\dfrac{1}{nx}$ исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (1;4)$ и $E_2 = (4;+\infty)$.

14. Вычислите криволинейный интеграл по замкнутой кривой γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева: $\displaystyle\oint\limits_{\gamma}\left(1-y^2\right)dx + (x-2xy)dy$, если γ – эллипс $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

15. Разложите функцию $f(x) = |x-1|$ при $x \in [0;2]$ в ряд Фурье по системе $\{1, \cos\pi x, \sin\pi x, ..., \cos\pi kx, \sin\pi kx, ...\}$. Постройте график суммы ряда. Определите, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty;+\infty)$.

16. Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{1}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$ (обход контура совершается против часовой стрелки).

17. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x} = -x+2y,\\ \dot{y} = -2x+3y.\end{cases}$

18. Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' + xy' - y = x$. Решите для этого уравнения задачу Коши: $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$.
19. Применяя метод множителей Лагранжа, исследуйте на относительный экстремум функцию $u(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $x^2 + y^2 = 2$.
20. Преобразуйте уравнение $y z_{xx} + (x - y) z_{xy} - x z_{yy} - z_x + z_y = 4(x + y)^2$, выполнив замену независимых переменных $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ так, чтобы преобразованное уравнение не содержало z_{uu} и z_{vv}.

ВАРИАНТ 2

1. Найдите производную функции $x^{\cos x}$.
2. Разложите по формуле Маклорена до $o(x^4)$ функцию $\operatorname{tg}(\operatorname{sh} x)$.
3. Найдите A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Укажите тип изолированной особой точки однозначного характера $z_0 = 0$ для функции $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$.
5. В интеграле $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x - x^2}} f(x, y)\, dy$ поменяйте пределы интегрирования, а также перейдите к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ двумя способами.
6. Треугольник ABC задан вершинами $A(0;0;1)$, $B(1;2;3)$ и $C(3;4;1)$. Напишите уравнение биссектрисы угла CAB. Система координат декартова прямоугольная.
7. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$. Выпишите матрицу перехода от исходного ба-

зиса к каноническому. Укажите ранг и сигнатуру квадратичной формы.

8. Найдите общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+2y+z=3, \\ 2x+2y+3z=4, \\ 3x+2y+5z=5. \end{cases}$

   Укажите частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. Найдите асимптоты, координаты точек экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, постройте график функции $y=\dfrac{2x^2+x+1}{1+x}$.

10. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}$.

11. Вычислите интеграл $\int \sin(2x)\cdot e^{\cos x}dx$.

12. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x\,dx}{x^{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\ln(1+x)}}$.

13. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} xe^n \sin\dfrac{x}{5^n}$ исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0;1)$ и $E_2=(1;+\infty)$.

14. Вычислите криволинейный интеграл по замкнутой кривой γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева: $\oint\limits_{\gamma}(2xy-y)\,dx+x^2dy$, если γ – граница области $x^2+y^2<2x$.

15. Разложите функцию $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } x\in(0;1], \\ 0 \text{ при } x\in[-1;0] \end{cases}$ в ряд Фурье по системе $\{1,\cos\pi x,\sin\pi x,\ ...,\ \cos\pi kx,\sin\pi kx,\ ...\}$. Постройте график суммы ряда. Определите, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty;+\infty)$.

16. Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл $\oint\limits_{\left|z+\frac{i}{2}\right|=1} \frac{1}{z^2+1}\sin\frac{i}{z}\,dz$ (обход контура совершается против часовой стрелки).
17. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$
18. Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$. Решите для этого уравнения задачу Коши $y(1) = 1,\ \ y'(1) = 3.$
19. Применяя метод множителей Лагранжа, исследовать на относительный экстремум функцию $u(x, y) = 3x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 13.$
20. Преобразуйте уравнение $x^2 z_{xx} - xy\,z_{xy} - 2y^2 z_{yy} + xz_x - 2yz_y = 9xy^2$, выполнив замену независимых переменных $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ так, чтобы преобразованное уравнение не содержало z_{uu} и z_{vv}.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ВАРИАНТ 1

1. Ответ: $2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$.

Решение.

$$\left(x^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)' = \left(e^{\ln x \ln x}\right)' = \left(e^{\ln^2 x}\right)' = e^{\ln^2 x} \cdot \left(\ln^2 x\right)' = x^{\ln x} 2\ln x \frac{1}{x} =$$

$$= 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}.$$

2. Ответ: $x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)$.

Решение.

Пусть $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ – сложная функция, и пусть известны разложения функций φ и f по формуле Маклорена, т.е.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o\left(x^n\right), \tag{2.1}$$

$$f(u) = \sum_{k=0}^{n} d_k u^k + o\left(u^n\right). \tag{2.2}$$

Тогда для нахождения коэффициентов $h_k\left(k = 0, 1, \ldots, n\right)$ разложения

$$F(x) = f\left(\varphi(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} h_k x^k + o\left(x^n\right)$$

нужно в формулу (2.2):

- подставить $u = \varphi(x)$,
- заменить функцию $\varphi(x)$ ее разложением (2.1),
- произвести соответствующие арифметические действия, сохраняя при этом только члены вида $h_k x^k$, где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Формула Маклорена для функции $\sin u$ имеет вид

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + o\left(u^4\right) \tag{2.3}$$

(так как $u = \operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$, то разложение $\sin u$ нужно брать до $o\left(u^4\right)$).

При выполнении экзаменационной письменной работы разложение функции $\operatorname{arctg} x$ можно считать известным:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right). \quad (2.4)$$

Для тех, кто забыл это разложение, напомним его вывод.

Пусть известно разложение по формуле Маклорена до $o\left(x^n\right)$ производной функции $f(x)$, т.е. известно разложение $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right)$, где $b_k = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$. Тогда существует $f^{(n+1)}(0)$, и поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o\left(x^{n+1}\right) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right),$$

где $a_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{b_k}{k+1}$.

Следовательно,

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right), \quad (2.5)$$

где b_k – коэффициенты формулы Маклорена функции $f'(x)$. Иначе говоря, разложение $f(x)$ получается «формальным интегрированием» разложения $f'(x)$ с повышением порядка o малого на 1 и с добавлением слагаемого, равного постоянной $f(0)$ (в общем случае $f(x_0)$ при разложении по степеням $x - x_0$).

Так как $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o\left(x^3\right)$ и, учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, по формуле (2.5) получаем (2.4).

Подставляя в (2.3) разложение (2.4), имеем

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \sin\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)\right) = \left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)\right)-$$

$$-\frac{\left(x-\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)\right)^3}{3!}+o\left(x^4\right) = x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right) = x-\frac{x^3}{2}+o\left(x^4\right).$$

3. Ответ: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Решение.

I способ

Элементы обратной матрицы $A^{-1}=\left(d_{ij}\right)$ можно найти, например, по формуле

$$d_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}M_{ji}}{\det A}, \tag{3.1}$$

где M_{ji} — дополнительный минор элемента a_{ji} в матрице A.

Для матриц $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ имеем: $M_{11}=a_{22}$, $M_{12}=a_{21}$, $M_{21}=a_{12}$ и $M_{22}=a_{11}$. Согласно (3.1) $d_{11}=\frac{(-1)^2 a_{22}}{\det A}$, $d_{12}=\frac{(-1)^3 a_{12}}{\det A}$, $d_{21}=\frac{(-1)^3 a_{21}}{\det A}$ и $d_{22}=\frac{(-1)^2 a_{11}}{\det A}$, т.е.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix} = \frac{1}{1\cdot 4-2\cdot 3}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

II способ

$A=\left(a_{ij}\right)$, $A^{-1}=\left(d_{ij}\right)$. Условие $AA^{-1}=E$ можно подробнее записать системой линейных уравнений для определения j-го столбца обратной матрицы:

$$\begin{cases} a_{11}d_{1j}+\ldots+a_{1n}d_{nj}=0,\\ \qquad\vdots\\ a_{j1}d_{1j}+\ldots+a_{jn}d_{nj}=1,\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}d_{1j}+\ldots+a_{nn}d_{nj}=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Систему (3.2) можно решать, например, методом Гаусса. При различных j системы (3.2) будут отличаться только столбцами правых частей, т.о., элементарные операции со строками расширенной матрицы одни и те же при любых значениях j. Можно решать все системы одновременно, приписав к матрице A столбцы правых частей всех систем, т.е. единичную матрицу E:

$$\left\| A \middle| E \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,0 \cdots 0\,1 \\ \vdots \\ 0\,0 \cdots 0\,1 \end{matrix} \right\|. \tag{3.3}$$

Если мы при помощи элементарных операций со строками матрицы (3.3) преобразуем ее левую половину в единичную матрицу, то ее правая половина преобразуется в матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-3(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)+(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{(2)}{2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

и $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Ответ: Π^2 (полюс 2-го порядка).

Решение.

Определение. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ однозначного характера функции $f(z)$ называется

1) ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;
2) ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;
3) ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 z} = \infty$, и $z_0 = 0$ будет полюсом для $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

Утверждение. Если точка $a \in \mathbb{C}$ является полюсом функции $f(z)$, то существует натуральное число n такое, что $f(z) \sim \dfrac{A}{(z-a)^n}$ при $z \to a$ $(A \in \mathbb{C},\ A \neq 0)$.

В этом случае n называется порядком полюса.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, функция $g(z)$ регулярна в точке a и $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(m-1)}(a) = 0$, $g^{(m)}(a) \neq 0$. Тогда говорят, что функция g имеет в точке a ***нуль m-го порядка*** (или ***m-й кратности***). Если же $g(a) \neq 0$, то говорят, что точка a не является нулем функции g (или функция g имеет в точке a нуль нулевого порядка).

Утверждение. Пусть функции g, h регулярны в точке a, причем h имеет в точке a нуль k-го порядка $(k \geq 0)$, а g имеет в точке a нуль m-го порядка $(m \geq 1)$. Тогда если $m > k$, то функция $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ имеет в точке a полюс $(m-k)$-го порядка $\left(\Pi^{m-k}\right)$.

<u>I способ</u>

В нашем случае $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\sin^2 z}$, где $g(z) = \sin^2 z$ такова, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 2\sin 0 \cos 0 = 0$, $g''(0) = 2\cos^2 0 - 2\sin^2 0 = 2 \neq 0$, т.е. имеет в точке $z_0 = 0$ нуль 2-го порядка, т.о., точка $z_0 = 0$ является полюсом 2-го порядка для $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

<u>II способ</u>

В нашем случае $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z} = \dfrac{h(z)}{z^2}$, где $h(0) \neq 0$, т.о., точка $z_0 = 0$ является полюсом 2-го порядка для $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

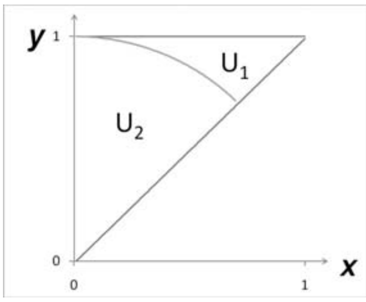
<u>III способ</u>

В нашем случае $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z} \sim \dfrac{1}{z^2}$, т.е. точка $z_0 = 0$ является полюсом 2-го порядка для $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

5. Ответ: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr =$

$$= \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} rdr \int\limits_{\pi/4}^{\arcsin(1/r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi .$$

Решение.



Неравенства $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$ задают область интегрирования V. Проекцией V на ось Oy является отрезок $[0;1]$. Каждая прямая $y = \text{const} \in [0;1]$ пересекает множество V по отрезку $[0;\beta(y)]$.

Конец отрезка $\beta(y)$ находим из решения уравнения $y = x$, т.е. $\beta(y) = y$. Таким образом, множество V задается неравенствами $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$, и $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx$.

Перейдем теперь к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$\iint\limits_X f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_U f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big)\,rdrd\varphi$, так как якобиан $J = \dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$.

Угол $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$, а каждый луч $\varphi = \text{const} \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ пересекает множество V по отрезку $[0;\beta(\varphi)]$. Конец отрезка $\beta(\varphi)$ находим из решения уравнения $1 = r\sin\varphi$, т.е. $\beta(\varphi) = \dfrac{1}{\sin\varphi}$. Множество U (область интегрирования в полярных координатах) задается неравенствами $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 f\left(x, y\right) dy \ = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\phi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r dr .$$

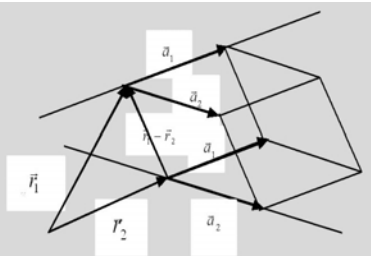
Для изменения порядка интегрирования в полярных координатах удобно область интегрирования разбить на две: U_1, задаваемую неравенствами $0 \le r \le 1$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, и U_2, задаваемую неравенствами $1 \le r \le \sqrt{2}$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \beta\left(r\right)$, где $\beta\left(r\right)$ находим из решения уравнения $1 = r\sin\varphi$, т.е. $\beta\left(r\right) = \arcsin\dfrac{1}{r}$.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 f\left(x, y\right) dy \ = \int\limits_0^1 r dr \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) d\varphi \ +$$

$$+ \int\limits_1^{\sqrt{2}} r dr \int\limits_{\pi/4}^{\arcsin(1/r)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) d\varphi \cdot$$

6. Ответ: 7.

Решение.



Пусть заданы две непараллельные прямые своими параметрическими уравнениями:

$\vec r = \vec r_1 + t\,\vec a_1$, $\vec r = \vec r_2 + t\,\vec a_2$.

Расстояние между этими прямыми равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, проведенными через эти прямые.

Для построения этих плоскостей от концов радиусов-векторов $\vec r_1$ и $\vec r_2$ отложим векторы $\vec a_1$ и $\vec a_2$ (см. рис.) и построим на векторах $\vec r_1 - \vec r_2$, $\vec a_1$ и $\vec a_2$ параллелепипед. Его высота и есть искомое расстояние d.

Объем параллелепипеда равен $V = \left|\left(\vec r_1 - \vec r_2, \vec a_1, \vec a_2\right)\right|$, а площадь основания равна $S = \left|\left[\vec a_1, \vec a_2\right]\right|$. Поэтому $d = \dfrac{V}{S} = \dfrac{\left|\left(\vec r_1 - \vec r_2, \vec a_1, \vec a_2\right)\right|}{\left|\left[\vec a_1, \vec a_2\right]\right|}$.

Если прямые пересекаются, то векторы $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны, и расстояние d равно нулю.

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ (например), $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Используем запись смешанного и векторного произведений в ортонормированном правом базисе:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(2\cdot 0 - 2\cdot 1) + 3(0\cdot 0 - 2\cdot 2) + 6(0\cdot 1 - 2\cdot 2) = -42;$$

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\cdot 0 - 2\cdot 1) \\ -(0\cdot 0 - 2\cdot 2) \\ (0\cdot 1 - 2\cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если базис левый, то в формулах для смешанного и векторного произведений перед определителем ставится знак «минус», на значение модулей это не влияет.

$$V = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2)| = 42, \quad S = |[\vec{a}_1, \vec{a}_2]| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 6;$$

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|} = \frac{42}{6} = 7.$$

7. Ответ: $t_1^2 - t_2^2$, $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = S(t_1, t_2, t_3)^{\mathrm{T}}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ранг = 2, сигнатура = 0.

Решение.

Удобно использовать метод выделения полных квадратов Лагранжа.

Метод Лагранжа состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов.

Пусть квадратичная форма записана в каком-либо базисе через координаты вектора $\vec{x}$ формулой $k(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i x_j$.

Возможны два случая:

1. Хотя бы один из коэффициентов при квадратах α_{ii} отличен от нуля. Не нарушая общности, будем считать, что $\alpha_{11}\neq 0$, т.к. этого всегда можно добиться соответствующей перенумерацией переменных.

   Преобразуем квадратичную форму следующим образом, собирая вместе слагаемые, содержащие x_1:

   $$k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \alpha_{11}x_1^2+2\alpha_{12}x_1x_2+\ldots+2\alpha_{1n}x_1x_n+k_1(x_2,\ldots,x_n) =$$

   $$=\frac{1}{\alpha_{11}}\Big[\left(\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n\right)^2-\left(\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n\right)^2\Big]+$$

   $$+k_1(x_2,\ldots,x_n) = \frac{y_1^2}{\alpha_{11}}+k_2(x_2,\ldots,x_n),$$

где $y_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n$, $k_2(x_2,\ldots,x_n)=k_1(x_2,\ldots,x_n)-$

   $-\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n\right)^2$ – квадратичная форма от $n-1$ переменных $x_2,\ldots,x_n$.

   С квадратичной формой $k_2(x_2,\ldots,x_n)$ поступаем аналогичным образом и т.д.

2. Все коэффициенты $\alpha_{ii}=0$, $i=1,2,\ldots,n$, но найдется коэффициент $\alpha_{ij}\neq 0$, $i\neq j$ (для определенности, не нарушая общности, будем считать $\alpha_{12}\neq 0$).

   Этот случай заменой переменных $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$, $x_i=y_i$, $i=3,4,\ldots,n$ сводится к первому.

   В итоге квадратичная форма приведется к виду $\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k^2$, где среди чисел β_k, возможно, есть нули.

Остается произвести замену переменных $t_k = y_k\sqrt{|\beta_k|}$, если $\beta_k \neq 0$; $t_k = y_k$, если $\beta_k = 0$. Квадратичная форма приведется к каноническому виду $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k y_k^{\;2}$, где $\varepsilon_k = 0; \pm 1$.

В нашей задаче $\alpha_{22} = 1$, поэтому удобно начать выделение полного квадрата с переменной x_2, а не x_1. Тогда $K(x_1, x_2, x_3) = x_2^{\;2} + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + 3x_1^{\;2} - 3x_3^{\;2} = (x_2 + 2x_1 - x_3)^2 - (2x_1 - x_3)^2 + 3x_1^{\;2} - 3x_3^{\;2} = (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - 4x_1^{\;2} + 4x_1x_3 - x_3^{\;2} + 3x_1^{\;2} - 3x_3^{\;2} = (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_1^{\;2} + 4x_1x_3 - 4x_3^{\;2} = (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - (x_1 - 2x_3)^2 = t_1^{\;2} - t_2^{\;2}$,

где $t_1 = 2x_1 + x_2 - x_3$, $t_2 = x_1 - 2x_3$, $t_3 = x_3$ или $x_3 = t_3$, $x_1 = t_2 + 2x_3 = t_2 + 2t_3$ и $x_2 = t_1 - 2x_1 + x_3 = t_1 - 2(t_2 + 2t_3) + t_3 = t_1 - 2t_2 - 3t_3$.

Проведенную замену переменных запишем в матричном виде: $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = S(t_1, t_2, t_3)^{\mathrm{T}}$, где $\boxed{S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ – матрица перехода к базису, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Определение. Число не равных нулю коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется ***рангом*** квадратичной формы.

$\boxed{\text{Ранг} = 2}$

Число положительных коэффициентов в каноническом виде вместе с ***индексом*** – числом отрицательных коэффициентов – характеризует квадратичную форму. Зачастую удобно характеризовать квадратичную форму рангом и разностью числа положительных и числа отрицательных коэффициентов в каноническом виде. Эта разность называется ***сигнатурой*** квадратичной формы.

$\boxed{\text{Сигнатура} = 1 - 1 = 0}$

8. Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Решение.

Имеет место

Предложение. Элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы соответствуют преобразования системы линейных уравнений в эквивалентную систему.

Поэтому удобно, применяя элементарные преобразования строк, привести расширенную матрицу к упрощенному виду, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2)-5(1) \\ (3)-3(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\substack{y \leftrightarrow z \\ (1)+(2)}}$$

$$\xrightarrow{\substack{y \leftrightarrow z \\ (1)+(2)}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{-1\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы равны 2, поэтому система совместна.

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы называется любая система из $n-r$ решений, где n – число переменных, а r – ранг матрицы однородной системы.

Теорема. Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-r}$ – фундаментальная система решений однородной системы уравнений, а $\mathbf{y}_0$ – некоторое решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{8.1}$$

то столбец $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + C_1\mathbf{x}_1 + \ldots + C_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ при любых числах $C_1, \ldots, C_{n-r}$ является решением системы линейных уравнений (8.1). Наоборот, для каждого решения этой системы найдутся такие числа $C_1, \ldots, C_{n-r}$, при которых оно имеет вид $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + C_1\mathbf{x}_1 + \ldots + C_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$.

Частное решение $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – некоторое решение исходной неоднородной системы – получим, например, положив $y = 0$: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Размерность пространства решений однородной системы равна $3-2=1$. Базисные векторы находим из основной матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, считая y свободным неизвестным. Тогда

$x=7y$, $z=-9y$. Базис ФСР состоит из вектора $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Окончательно общее решение имеет вид: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$, $C\in\mathbb{R}$.

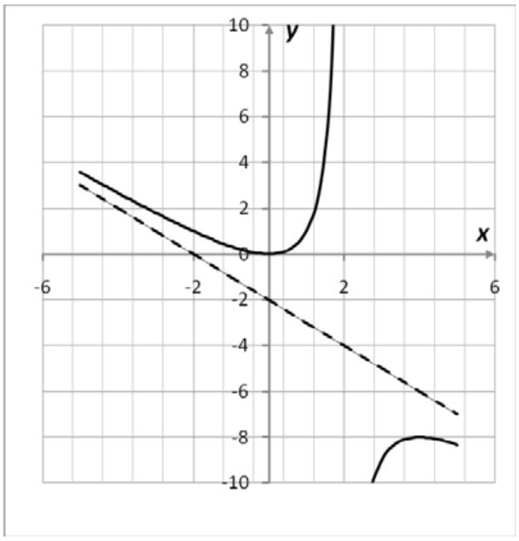
9. Ответ:

Асимптоты:
$x=2$;
$y=-x-2$.

Экстремумы:
$(0;0)$ – min,
$(4;-8)$ – max.

Выпукла вниз при $x<2$,

выпукла вверх при $x>2$.



Решение.

Область определения функции $D_y=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

<u>Асимптоты</u>

Так как $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{x^2}{2-x}=\mp\infty$, то прямая <u>$x=2$ – вертикальная асимптота</u>.

Наклонные асимптоты для рациональной функции находим, например, методом выделения главной части:

$$y=\frac{x^2}{2-x} = \frac{x^2-2x+2x}{2-x} = -x+\frac{2x-4+4}{2-x} = -x-2+\frac{4}{2-x} =$$

$= -x-2+o(1)$ при $x\to\infty$.

$y=-x-2$ – наклонная асимптота при $x\to\infty$.

Замечание. Можно искать наклонную асимптоту функции $y=f(x)$ в виде $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Найдем первую и вторую производные функции:

$$y' = -1+\frac{4}{(2-x)^2} = -\frac{(x-4)x}{(x-2)^2}, \qquad y'' = -\frac{8}{(x-2)^3}.$$

Результаты исследования удобно представить в виде таблицы.

Заполняя таблицу, учитываем, что в правой и левой окрестностях точки $x=2$ поведение графика функции различно.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	$2-0$	$2+0$	$(2;4)$	4	$(4;+\infty)$
$y(x)$	$+$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	-8	$-$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$
$y''(x)$	$+$	$+1$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	-1	$-$
выводы	$\downarrow\cup$, наклонная асимптота $y=-x-2$	max	$\uparrow\cup$	$\uparrow\cup$, вертикальная асимптота	$\uparrow\cap$, вертикальная асимптота	$\uparrow\cap$	min	$\downarrow\cap$, наклонная асимптота $y=-x-2$

Строим график функции по результатам исследований (см. ответ).

10. Ответ: $e^{2/3}$.

Решение.

Если ввести обозначения $u=\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh}x}$, $v=\dfrac{1}{x+\ln(1-x)}$, то требуется найти $\lim\limits_{x\to 0}u^v=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln u^v}=e^{\lim\limits_{x\to 0}v\ln u}$ (применен переход к пределу под знаком непрерывной функции e^x).

Будем вычислять предел $\lim\limits_{x\to 0}v\ln u$.

$\boxed{v}$ $v=\dfrac{1}{x+\ln(1-x)}=\dfrac{1}{x+\left(-x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}=\dfrac{1}{-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}$.

$\boxed{\ln u}$ Исходя из структуры функции v, заключаем, что $\ln u$ нужно раскладывать до $o\left(x^2\right)$.

Имеем $u=\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{x+\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}=\dfrac{1-\dfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)}{1+\dfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)}$.

Рассмотрим $\dfrac{1}{1+w}$, где $w=\dfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)$. Так как $w\sim\dfrac{x^2}{6}$ при $x\to 0$, то $\dfrac{1}{1+w}$ будем раскладывать до $o(w)$. Получаем $\dfrac{1}{1+w}=1-w+o(w)$. Возвращаясь к переменной x, имеем

$u=\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)=1-\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$ –

оставляем слагаемые со степенью x не выше второй, т.к. остальные включены в $o\left(x^2\right)$.

Тогда $\ln u=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)=\ln(1+t)$, где $t=-\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$.

Так как $t\sim-\dfrac{x^2}{3}$ при $x\to 0$, то $\ln(1+t)$ будем раскладывать до

$o(t)$. Получаем $\ln(1+t) = t+o(t)$. Возвращаясь к переменной x, имеем $\ln u = -\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$.

$\boxed{v\ln u}$ Теперь $\lim\limits_{x\to 0} v\ln u = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}{-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{1}{3}+o(1)}{\dfrac{1}{2}+o(1)}\right) = \dfrac{2}{3}$.

Замечание. Были использованы разложения

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n}\right),\quad \sin x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n}\right),$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o\left(x^n\right),\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right).$$

11. Ответ: $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x^2}{2}-\ln\left|\sin\dfrac{x^2}{2}\right|+C$.

Решение.

Заметим, что $I = \displaystyle\int\frac{x^3dx}{\cos x^2-1} = \int\frac{x^3dx}{-2\sin^2\dfrac{x^2}{2}}$.

Пусть на некотором промежутке определена сложная функция $f(\varphi(x))$ и функция $t=\varphi(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках; тогда если интеграл $\int f(t)dt$ существует, то интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ также существует, причем

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)\,d\,t\Big|_{t=\phi(x)}. \qquad (11.1)$$

Формулу (11.1) называют ***формулой интегрирования подстановкой***.

Заменим переменную интегрирования, положив $t=\dfrac{x^2}{2}=\varphi(x)$. Тогда $\varphi'(x)=x$ и $I = \displaystyle\int\frac{tdt}{-\sin^2 t}$.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке и дифференцируемы во всех его внутренних точках, тогда если на этом промежутке существует интеграл $\int vu'dx$, то существует и интеграл $\int uv'dx$, причем

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \text{ или } \int udv = uv - \int vdu . \qquad (11.2)$$

Формула (11.2) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Применяем теперь формулу интегрирования по частям:

$$I = -\int \frac{tdt}{\sin^2 t} = \int td\,\mathrm{ctg}\,t = t\,\mathrm{ctg}\,t - \int \mathrm{ctg}\,tdt = t\,\mathrm{ctg}\,t - \int \frac{\cos t}{\sin t}dt .$$

Заменим в последнем интеграле переменную интегрирования, положив $u = \sin t = \psi(t)$. Тогда $\psi'(t) = \cos t$ и

$$I = t\,\mathrm{ctg}\,t - \int \frac{du}{u} = t\,\mathrm{ctg}\,t - \ln|u| + C .$$

Проводя обратные замены, получим

$$I = t\,\mathrm{ctg}\,t - \ln|\sin t| + C = \frac{x^2}{2}\mathrm{ctg}\frac{x^2}{2} - \ln\left|\sin\frac{x^2}{2}\right| + C .$$

12. Ответ: Интеграл сходится при $\alpha \in \left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$ и расходится при остальных значениях α.

Решение.

Несобственный интеграл от знакопостоянной функции имеет две особенности – 0 и $+\infty$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{cth}^\alpha\left(\sqrt{x^3}\right)dx}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln(1+x)}} = \int_0^{2} \frac{\mathrm{cth}^\alpha\left(\sqrt{x^3}\right)dx}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln(1+x)}} + \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{cth}^\alpha\left(\sqrt{x^3}\right)dx}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln(1+x)}} \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 .$$

$\boxed{I_1}$ Интеграл $I_1 = \int_0^{2} \frac{\mathrm{cth}^\alpha\left(\sqrt{x^3}\right)dx}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln(1+x)}}$ имеет особенность в точке 0.

Так как $\mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$, $\mathrm{ch}\,x \sim 1$, $\mathrm{sh}\,x \sim x$, $1 + x^{8\alpha} \sim 1$, $\ln(1+x) \sim x$ при

$x \to 0$, т.е. $\dfrac{\operatorname{cth}^{\alpha}\left(\sqrt{x^3}\right)}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln\left(1+x\right)}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3\alpha}{2}}x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3\alpha+1}{2}}}$ при $x \to 0$, то I_1 эквивалентен по сходимости интегралу $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{x^{\beta}}$ при $\beta = \dfrac{3\alpha+1}{2}$.

Известно, что интеграл $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{x^{\beta}}$ сходится при $\beta < 1$ и расходится при $\beta \ge 1$. Поэтому при $\dfrac{3\alpha+1}{2} \ge 1$, т.е. при $\alpha \ge \dfrac{1}{3}$ интеграл I_1 расходится, а при $\alpha < \dfrac{1}{3}$ сходится.

$\boxed{I_2}$ Интеграл $I_2 = \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\operatorname{cth}^{\alpha}\left(\sqrt{x^3}\right)dx}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)\ln\left(1+x\right)}}$ имеет особенность на $+\infty$. Так как $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, а $\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^{8\alpha}\right)}} \sim \dfrac{1}{x^{4\alpha}}$ и $\ln\left(1+x\right) \sim \ln x$ при $x \to +\infty$, то I_2 эквивалентен по сходимости интегралу $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{4\alpha}\ln^{\frac{1}{2}} x}$.

Известно, что интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\sigma}\ln^{\beta} x}$ $\begin{cases} \text{сходится при всех } \beta \text{ и } \sigma > 1, \\ \text{сходится при } \beta > 1 \text{ и } \sigma = 1, \\ \text{расходится при } \beta \le 1 \text{ и } \sigma = 1, \\ \text{расходится при всех } \beta \text{ и } \sigma < 1. \end{cases}$

В нашем случае $\beta = \dfrac{1}{2}$. Интеграл I_2 сходится при $\sigma = 4\alpha > 1$, т.е. $\alpha > \dfrac{1}{4}$ и расходится при $\alpha \le \dfrac{1}{4}$.

13. Ответ: Предельная функция $f\left(x\right) = \operatorname{ch} x$.

Сходится равномерно на $E_1 = \left(1;4\right)$;

сходится неравномерно на $E_2 = \left(4;+\infty\right)$.

Решение.

1. Доказательство поточечной сходимости последовательности при всех $x \in (1;4)$ и $(4;+\infty)$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{nx_0} = \cos 0 = 1$ для всех $x_0 \neq 0$, то $\operatorname{ch} x$ – предельная функция последовательности $f_n(x)$.

2. Доказательство равномерной сходимости на $E_1 = (1;4)$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называют равномерно ***сходящейся к функции*** $f(x)$ ***на множестве*** E $\left(\text{обозначается } f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x)\right)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N_\varepsilon \ \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ \forall x \in E: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (13.1)$$

В этом определении существенно, что номер N_ε не зависит от x.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называют равномерно ***сходящейся на множестве*** E, если существует функция $f(x)$, к которой эта последовательность сходится равномерно на множестве E.

Достаточное условие равномерной сходимости последовательности. Если существуют числовая последовательность $\{a_n\}$ и номер n_0 такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < a_n$, то $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x)$.

Имеем для всех $x \in E_1$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\operatorname{ch} x \cdot \cos\frac{1}{nx} - \operatorname{ch} x\right| = \operatorname{ch} x \left|\cos\frac{1}{nx} - 1\right| = \operatorname{ch} x \left|-2\sin^2\frac{1}{2nx}\right| =$$

$$= \operatorname{ch} x \cdot 2\sin^2\frac{1}{2nx} \leq \ \operatorname{ch} x \cdot \frac{2}{(2nx)^2} \ \leq \operatorname{ch} x \cdot \frac{1}{2n^2} \leq \ \leq \frac{\operatorname{ch} 4}{2n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$ поэтому

последовательность $f_n(x) = \operatorname{ch} x \cdot \cos\dfrac{1}{nx}$ сходится на множестве $E_1 = (1;4)$ равномерно.

3. Доказательство отсутствия равномерной сходимости на $E_2 = (4; +\infty)$.

Если условие (13.1) не выполняется, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall k \in \mathrm{N} \ \ \exists n \geq k \ \ \exists x^* \in E : \left| f_n\left(x^*\right) - f\left(x^*\right) \right| \geq \varepsilon_0, \tag{13.2}$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ ***не сходится равномерно к*** $f(x)$ ***на множестве*** E.

Если $f_n(x) \xrightarrow[E]{} f(x)$, но $f_n(x) \underset{E}{\not\rightrightarrows} f(x)$, то говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ ***сходится к*** $f(x)$ ***на множестве*** E ***неравномерно***.

Условие (13.2) равносильно тому, что найдется последовательность $x_n \in E$ такая, что

$$\left| f_n(x_n) - f(x_n) \right| \not\longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{13.3}$$

Покажем, что выполняется условие (13.3).

Возьмем $x_n = n \in E_2 = (4; +\infty)$. Тогда $\left| f_n(n) - f(n) \right| = \operatorname{ch} n \cdot 2 \sin^2 \dfrac{1}{2n^2} \sim$ $\sim \dfrac{\operatorname{ch} n}{2n^4} \underset{n \to \infty}{\to} \infty$; поэтому последовательность $f_n(x) = \operatorname{ch} x \cdot \cos \dfrac{1}{nx}$ сходится на множестве $E_1 = (1; 4)$ неравномерно.

14. Ответ: 6π.

Решение.

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ определено непрерывное векторное поле $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, – ориентированная кусочно-гладкая кривая, лежащая в области Ω.

Криволинейный интеграл второго рода от векторного поля* F *по кривой Γ, обозначаемый $\int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy$, вычисляется как

$$\pm \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t), y(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) y'(t) \Big) dt, \tag{14.1}$$

где знак «+» берется, если направление обхода кривой соответствует возрастанию параметра t, «–» – убыванию.

Формула Грина. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании области $G \subset \mathbb{R}^2$, граница которой ∂G – простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда справедлива формула Грина:

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dxdy, \qquad (14.2)$$

где ∂G пробегается против часовой стрелки.

I способ

Воспользуемся формулой (14.2), где $P = 1 - y^2$, $Q = x - 2xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 2y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y$, $\gamma = \partial G$, а $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1 \right\}$.

Тогда $\oint\limits_{\gamma} \left(1 - y^2\right) dx + (x - 2xy)\, dy = \iint\limits_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1} \left[(1 - 2y) - (-2y) \right] dxdy =$

$= \iint\limits_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1} dxdy$. Это – площадь эллипса, ограниченного кривой γ.

Данная площадь равна $2 \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi$.

II способ

Чтобы воспользоваться формулой (14.1), параметризуем кривую γ – эллипс $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$: $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

На кривой γ выполняется равенство $\left(1 - y^2\right) dx + (x - 2xy)\, dy =$

$= \left(1 - 9\sin^2 t\right)(-2\sin t)\, dt + (2\cos t - 6\cos t \cdot \sin t)\, 3\cos t dt =$

$= \left(-2\sin t + 18\sin^3 t + 6\cos^2 t - 18\cos^2 t \sin t\right) dt =$

$= \left(-2\sin t + 3(\cos 2t + 1) - 18\cos 2t \sin t\right) dt =$

$= \left(3 - 2\sin t + 3\cos 2t - 9\sin 3t + 9\sin t\right) dt =$

$= \left(3 + 7\sin t + 3\cos 2t - 9\sin 3t\right) dt.$

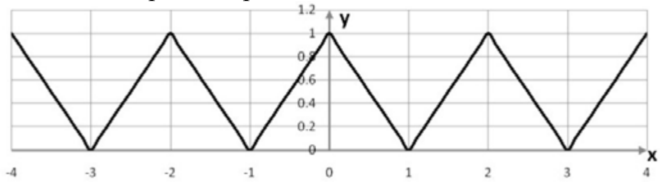
Получаем

$$\oint\limits_{\gamma}\left(1-y^2\right)dx+\left(x-2xy\right)dy = \int\limits_0^{2\pi}\left(3+7\sin t+3\cos 2t-9\sin 3t\right)dt =$$

$$= \left(3t-7\cos t+\frac{3}{2}\sin 2t+3\cos 3t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi .$$

15. Ответ: $f\left(x\right) = \frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2\left(2k-1\right)^2}\cos\pi\left(2k-1\right)x.$

Ряд сходится равномерно.



Решение.

Ряд Фурье функции $f\left(x\right)$ по тригонометрической системе $\left\{1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots\right\}$ на отрезке $\left[-l,\,l\right]$ будем записывать в следующем виде:

$$f\left(x\right) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

и называть ***тригонометрическим рядом Фурье функции*** $f\left(x\right)$ ***на отрезке*** $\left[-l,\,l\right]$.

Коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)dx\,,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,$$

$n=1,2,\ \ldots$

Интегралы можно брать по любому отрезку длины $2l$, так как имеет место

Лемма. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-l, l]$ и $2l$-периодическая, то для любого вещественного числа a выполнено равенство $\int\limits_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$.

Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$, и этот отрезок разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых функция непрерывно дифференцируема.

Теорема. Ряд Фурье непрерывной $2l$-периодической функции, кусочно-гладкой на $[-l,l]$, сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$.

В нашем случае $2l = 2$, т.е. $l = 1$. Система $\{1, \cos \pi x, \sin \pi x, ...$
$..., \cos \pi kx, \sin \pi kx, ...\}$ состоит из функций с периодом 2.

Продолжим $f(x) = |x-1|$, $0 \le x \le 2$, с периодом 2 на всю вещественную ось. Получим функцию, непрерывную на всей числовой прямой и кусочно-гладкую на $[0,2]$ (см. рис. на с. 30).

Ее ряд Фурье сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$ к самой функции. Таким образом, не вычисляя коэффициентов ряда Фурье, мы уже установили, что ряд сходится равномерно, и построили график его суммы.

Вычислим теперь коэффициенты ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \pi kx + b_k \sin \pi kx).$$

Имеем:

$a_0 = \frac{1}{1}\int\limits_0^2 f(x)dx$; этот интеграл равен площади под графиком функции, т.е. равен $2 \cdot \left(\frac{1 \cdot 1}{2}\right) = 1$.

Для вычисления остальных коэффициентов сделаем в соответствующих интегралах замену $x-1=t$ и воспользуемся четностью функции $\cos \pi nt$ и нечетностью функции $\sin \pi nt$:

$$a_n = \frac{1}{1}\int_0^2 |x-1|\cos \pi n x dx = \int_{-1}^{1} |t|\cos(\pi n t + \pi n)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} |t|\cos(\pi n t)\,dt =$$

$$= 2(-1)^n \int_0^1 t\cos(\pi n t)\,dt = \frac{2(-1)^n}{\pi n}\int_0^1 t d\sin(\pi n t) =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi n}\left[t\cdot \sin(\pi n t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi n t)\,dt \right] = \frac{2(-1)^n}{\pi n}\left(\frac{\cos(\pi n t)}{\pi n}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{(\pi n)^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \dfrac{4}{(\pi n)^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 |x-1|\sin \pi n x dx = \int_{-1}^{1} |t|\sin(\pi n t + \pi n)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} |t|\sin(\pi n t)\,dt =$$

$= 0,\ n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, искомый ряд

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2}\cos \pi (2k-1) x}.$$

16. Ответ: $2\pi i\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$.

Решение.

Находим особые точки $f(z) = \dfrac{1}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$.

Особыми точками являются: $z = \infty$ и нули всех знаменателей: $z = -1$, $z = 0$.

Внутри контура $\gamma = \left\{ z : \left| z - \dfrac{1}{2} \right| = 1 \right\}$ находится существенно особая точка (СОТ) $z = 0$, вне – полюс 1-го порядка (Π^1) $z = -1$ и устранимая особая точка (УОТ) $z = \infty$.

Определение. Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ – изолированная особая точка функции f, регулярной в кольце $0 < |z-a| < \rho$; $\gamma_r = \{ z : |z-a| = r \}$ – положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z)\,dz.$

Утверждение. Если $a \in \mathbb{C}$, то $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\frac{1}{z-a}$ разложения функции f в ряд Лорана с центром в проколотой окрестности точки a.

$\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\frac{1}{z}$ разложения функции f в ряд Лорана в проколотой окрестности $z = \infty$.

Теорема (Коши о вычетах). Рассматривается область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с границей Γ – кусочно-гладкой замкнутой кривой, при обходе которой область G остается слева. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$), и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области. Тогда справедлива формула $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f.$

Согласно теореме Коши о вычетах интеграл $I = \oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{1}{1+z} e^{\frac{1}{z}}\,dz$ можно вычислить по формуле $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z)$ или, что удобнее, $I = -2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) \right)$.

<u>I способ</u>

Для нахождения вычета функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ разложим эту функцию в ряд Лорана в кольце $R < |z| < \infty$ $(R >> 1)$. Получаем

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)}{z}\left(1-\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=1$, следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -1$.

<u>II способ</u>

Вычет в УОТ $z=\infty$ можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty)-f(z)\big)$. В нашем случае $f(\infty)=\lim_{z\to\infty} f(z)=0$, и

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(0-\frac{1}{1+z}e^{\frac{1}{z}}\right) = \lim_{w\to 0}\left(-\frac{1}{w}\frac{1}{1+\frac{1}{w}}e^{w}\right) = -\lim_{w\to 0}\frac{e^{w}}{1+w} = -1.$$

Лемма. Пусть a – полюс функции f порядка $m \le m_0$. Тогда справедлива формула

$$\operatorname*{res}_{a} f(z) = \frac{1}{(m_0-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}}\left[(z-a)^{m_0-1} f(z)\right]. \tag{16.1}$$

Для нахождения вычета функции $f(z)$ в точке $z=-1$ воспользуемся формулой (16.1) при $m_0=1$:

$$\operatorname*{res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)f(z)\right] = \lim_{z\to -1} e^{\frac{1}{z}} = e^{-1}.$$

По теореме Коши о вычетах

$$I = -2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)\right) = -2\pi i\left(-1+\frac{1}{e}\right).$$

17. Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + C_2\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]e^{t}$.

Решение.

Запишем систему в векторной форме: $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы A, решив характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$, т.е. $0=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(3-\lambda)+4=$

$=-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$, т.е. $\lambda_{1,2}=1$.

Корень характеристического уравнения имеет кратность 2. Строим жорданову цепочку для матрицы A системы. Найдем собственный вектор $\vec{e}_1$:

$$F\vec{e}_1=\vec{0}\text{, где } F=A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\overset{(2)-(1)}{\rightarrow}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\overset{-\frac{1}{2}(1)}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Так как размерность собственного подпространства равна 1, то в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матрица имеет жорданову форму $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где присоединенный вектор $\vec{e}_2$ находим из системы

$$F\vec{e}_2=\vec{e}_1\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)-(1)}\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}(1)}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Решением этой системы является, например, столбец $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^t$, $\vec{x}_2=\left[t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\right]e^t$.

Общее решение: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^t+C_2\left[t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/2\\ 0\end{pmatrix}\right]e^t$.

18. Ответ: Общее решение: $y(x)=\dfrac{x}{2}\ln x+C_1x+\dfrac{C_2}{x}$.

Решение ЗК: $y(x)=\dfrac{1}{2}\left(x\ln x+x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение.

Сначала решаем однородное уравнение: $x^2y''+xy'-y=0$ – уравнение Эйлера.

Его решения ищем в виде $y = x^{\alpha}$.

Характеристическое уравнение: $\alpha + \alpha(\alpha - 1) - 1 = 0$, т.е. $0 = \alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$.

Фундаментальная система решений : $y_1 = x$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

Общее решение однородного уравнения: $y_o(x) = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$.

Частное решение ищем в виде $y_ч = ax\ln x$ (имеет место резонанс).

Тогда $(y_ч)' = a(\ln x + 1)$, $(y_ч)'' = \dfrac{a}{x}$.

Подставляя в исходное неоднородное дифференциальное уравнение (ДУ), получаем $x^2 \dfrac{a}{x} + xa(\ln x + 1) - ax\ln x = x$, или $2ax = x$, откуда $a = \dfrac{1}{2}$, и $y_ч = \dfrac{x}{2}\ln x$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_ч + y_o = \frac{x}{2}\ln x + C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Решение задачи Коши (ЗК) находим, определяя произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий (НУ) $y(1) = 1$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$:

$$y(1) = \frac{1}{2}\ln 1 + C_1 \cdot 1 + \frac{C_2}{1} = C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'(1) = \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2} + C_1 - \frac{C_2}{1} = \frac{1}{2} + C_1 - C_2 = \frac{1}{2}.$$

Решая систему для произвольных постоянных $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - C_2 = 0, \end{cases}$ находим $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$.

И решение ЗК: $y(x) = \dfrac{1}{2}\left(x\ln x + x + \dfrac{1}{x}\right)$.

19. Ответ: $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ – min, $u(-1,-1)=-2$ – max.

Решение.

Пусть на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$ заданы функции $f_0(x)$, $f_1(x)$, … , $f_m(x)$, причем $m<n$, и пусть E – множество точек множества G, удовлетворяющих системе уравнений

$$f_1(x)=0,\ \dots,\ f_m(x)=0. \qquad (19.1)$$

Уравнения (19.1) будем называть ***уравнениями связей*** (или просто ***связями***).

Точка $x^0=\left(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0\right)\in E$ называется точкой ***условного минимума*** (***строгого условного минимума***) функции $f_0(x)$ при наличии связей (19.1), если найдется такая проколотая окрестность x^0, в которой выполнено неравенство $f_0(x)\ge f_0\left(x^0\right)$ $\left(f_0(x)>f_0\left(x^0\right)\right)$.

Аналогично определяются точки ***условного максимума***.
Точки условного максимума и минимума называются точками ***условного экстремума***.

Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию $n+m$ переменных:

$$L(x,\lambda)=f_0(x)+\lambda_1 f_1(x)+\ldots+\lambda_m f_m(x),$$

где $x\in G$, а $\lambda=(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_m)\in\mathbb{R}^m$. Числа $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_m$ называются ***множителями Лагранжа***, а функция $L(x,\lambda)$ называется ***функцией Лагранжа***.

Будем говорить, что $\left(x^0,\lambda^0\right)$ есть ***стационарная точка функции Лагранжа***, если

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial x_1}\left(x^0,\lambda^0\right)=0,\quad \dots,\quad \frac{\partial L}{\partial x_n}\left(x^0,\lambda^0\right)=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\left(x^0,\lambda^0\right)=0,\quad \dots,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}\left(x^0,\lambda^0\right)=0.\end{gathered} \qquad (19.2)$$

Теорема (Лагранж). Пусть x^0 – точка условного экстремума функции $f_0(x)$ при наличии связей (19.1) и пусть функции $f_i(x)$, $i=\overline{0,m}$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0, причем в точке x^0 ранг матрицы Якоби

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^0\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(x^0\right) \end{pmatrix} \tag{19.3}$$

равен m.

Тогда найдутся такие множители Лагранжа $\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0$, что $\left(x^0,\lambda^0\right)$ будет стационарной точкой функции Лагранжа.

Теорема (достаточные условия условного экстремума). Пусть функции $f_i\left(x\right)$, $i=\overline{0,m}$, имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$, причем в точке x^0 ранг функциональной матрицы (19.3) равен m, и пусть $\left(x^0,\lambda^0\right)$ есть стационарная точка функции Лагранжа $L\left(x,\lambda\right)$.

Тогда если $d_{xx}^2L\left(x^0,\lambda^0\right)$ – второй дифференциал функции Лагранжа по переменным $x_1,\dots,x_n$ в точке $\left(x^0,\lambda^0\right)$ – есть положительно определенная квадратичная форма при $dx\in E_T=$ $=\left\{\xi=\left(\xi_1,\dots,\xi_n\right)\in\mathbb{R}^n:\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i\left(x^0\right)}{\partial x_k}\xi_k=0, i=\overline{1,m}\right\}$, то x^0 является точкой условного строгого минимума функции $f_0\left(x\right)$ при наличии связей (19.1).

Если $d_{xx}^2L\left(x^0,\lambda^0\right)$ есть отрицательно определенная квадратичная форма при $dx\in E_T$, то x^0 – точка условного строгого максимума.

Если $d_{xx}^2L\left(x^0,\lambda^0\right)$ есть неопределенная квадратичная форма при $dx\in E_T$, то x^0 не является точкой условного экстремума функции $f_0\left(x\right)$ при наличии связей (19.1).

$u(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = f_0(x)$, $\quad x^2+y^2-2=f_1(x)$ – уравнение связи.

Функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

Матрица Якоби $A=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\left(x^0,y^0\right) \quad \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\left(x^0,y^0\right)\right) = \left(2x^0 \quad 2y^0\right)$ имеет ранг равный 1 во всех точках, удовлетворяющих уравнению связи. Следовательно, можно применить метод Лагранжа.

Запишем функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\lambda\left(x^2+y^2-2\right)$.

Согласно необходимым условиям (19.2) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}+2\lambda x=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}+2\lambda y=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=f_1=x^2+y^2-2=0. \end{cases}$$

Из этой системы $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\lambda}}$ и $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\lambda}}$, откуда получаем $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{(2\lambda)^2}}-2=0$, т.е. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{(2\lambda)^2}}=1$, и $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

У функции Лагранжа есть две стационарные точки:
$M_1\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ и $M_2\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Так как $d^2_{xx}L(x,y,\lambda) = \left(\dfrac{2}{x^3}+2\lambda\right)dx^2+\left(\dfrac{2}{y^3}+2\lambda\right)dy^2$, то $d^2_{xx}L(M_1) =$
$= 3dx^2+3dy^2$ – положительно определенная квадратичная форма, и $(1,1)$ – точка условного минимума;
$d^2_{xx}L(M_2) = -3dx^2-3dy^2$ – отрицательно определенная квадратичная форма, и $(-1,-1)$ – точка условного максимума.

При этом $u_{\min} = u(1,1) = 2$, $u_{\max} = u(-1,-1) = -2$.

Замечание. Если аккуратно применять теорему о достаточных условиях, то нужно было продифференцировать условия связи: $xdx + ydy = 0$, выразить dy через dx или dx через dy, подставить полученное выражение в $d^2_{xx}L(M_i)$, $i = 1, 2$, и рассмотреть знакоопределенность полученной квадратичной формы от одномерного вектора dx (или dy). Но если $d^2_{xx}L(M_i)$ уже является знакоопределенной как квадратичная форма от двумерного вектора (dx, dy), то результат подстановки уже известен, и никакие дополнительные действия не нужны.

20. Ответ: Замена $u = x + y$, $v = y^2 - x^2$, $z_{uv} = -2$.

Решение.

Рассмотрим общий вид квазилинейного уравнения с частными производными второго порядка в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A(x,y)z_{xx}(x,y) + 2B(x,y)z_{xy}(x,y) + C(x,y)z_{yy}(x,y) + \\ + F\left(x,y,z,z_x,z_y\right) = 0. \end{aligned} \tag{20.1}$$

Уравнение (20.1) называется ***гиперболическим*** в области $G \subset \mathbb{R}^2$, если в этой области $B^2 - A\cdot C > 0$; при этом функции $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в G как функции двух переменных.

Уравнение характеристик для уравнения (20.1) – это обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$A(x,y)(dy)^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)(dx)^2 = 0. \tag{20.2}$$

Считая, например, что $dx \neq 0$, приведем это уравнение к квадратному уравнению относительно $\dfrac{dy}{dx}$, имеющему два решения, т.к. $B^2 - A\cdot C > 0$. Решая два полученных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, находим два семейства характеристик уравнения (20.1): $u(x,y) = C_1$, $v(x,y) = C_2$. Замена независимых переменных $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ в уравнении (20.1) приведет его к виду

$$a(u,v)z_{uv}(u,v)+f(u,v,z,z_u,z_v)=0\,, \qquad (20.3)$$

т.е. к виду, не содержащему z_{uu} и z_{vv} .

В нашей задаче $A(x,y)=y$, $2B(x,y)=x-y$, $C(x,y)=-x$.

Уравнение характеристик $y(dy)^2-(x-y)dydx-x(dx)^2=0$.

Предполагая, что вдоль характеристик $dx\neq 0$ $(x\neq \mathrm{const})$, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x-y)\frac{dy}{dx}-x=0\,. \qquad (20.4)$$

Существует два различных решения уравнения (20.4):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=-1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2=\frac{x}{y}\,. \qquad (20.5)$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, получаем связь между y и x для решений каждого из дифференциальных уравнений (20.5):

1. $\dfrac{dy}{dx}=-1$, $dy=-dx$, $y=-x+C_1$;

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$, $ydy=xdx$, $\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+C_2$,

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные Следовательно, функции $f_1(x,y)=y+x$ и $f_2(x,y)=y^2-x^2$ постоянны для каждого решения соответствующего уравнения (20.5), поэтому эти функции можно использовать для замены переменных

$$\boxed{u=y+x,\quad v=y^2-x^2.} \qquad (20.6)$$

При замене (20.6) производные преобразуются следующим образом (по правилу дифференцирования сложной функции):

$$\begin{array}{l|l}
\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}-2x\dfrac{\partial z}{\partial v}\,, & -1 \\
\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+2y\dfrac{\partial z}{\partial v}\,, & 1 \\
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}-2x\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)-2\dfrac{\partial z}{\partial v}-2x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)= & y
\end{array}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]-2\frac{\partial z}{\partial v}-$$

$$-2x\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2y-2x)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$ $x-y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4y\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial z}{\partial v}.$$ $-x$

Найдем уравнение, которому будет удовлетворять функция z, если независимыми переменными считать u и v. В соответствии с теорией коэффициенты при z_{uu} и z_{vv} равны нулю. Проверим это:

при z_{uu} $\quad 1\cdot y+1\cdot(x-y)+1\cdot(-x)=0$,

при z_{vv} $\quad 4x^2\cdot y+(-4xy)\cdot(x-y)+4y^2\cdot(-x)=0$.

Вычислим остальные коэффициенты:

при z_{uv} $\quad (-4x)\cdot y+(2y-2x)\cdot(x-y)+4y\cdot(-x)=-2(x+y)^2$,

при z_u $\quad 1\cdot(-1)+1\cdot 1=0$,

при z_v $\quad -2x\cdot(-1)+2y\cdot 1+(-2)\cdot y+2\cdot(-x)=0$.

В итоге получаем уравнение: $-2(x+y)^2 z_{uv}=4(x+y)^2$ или $z_{uv}=-2$.

ВАРИАНТ 2

1. $x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

2. $x+\dfrac{x^3}{2}+o\left(x^4\right)$.

3. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

4. ПП (простой полюс).

5. $$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\left(x,y\right)dx = \int\limits_0^{\pi/2} d\phi\int\limits_0^{2\cos\varphi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)rdr =$$
$$=\int\limits_0^2 rdr\int\limits_0^{\arccos(r/2)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)d\varphi .$$

6. $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{5}$.

7. $t_1^{\,2}-t_2^{\,2}+t_3^{\,2}$, $\left(x_1,x_2,x_3\right)^{\mathrm{T}}=S\left(t_1,t_2,t_3\right)^{\mathrm{T}}$, $S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

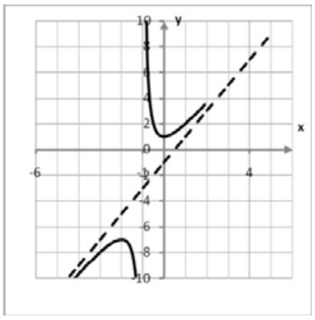
ранг = 3, сигнатура = 1.

8. $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

9. Асимптоты: $x=-1$; $y=2x-1$.

Экстремумы: $\left(-2;-7\right)$ – max, $\left(0;1\right)$ – min.

Выпукла вниз при $x>-1$, выпукла вверх при $x<-1$.



10. $e^{1/2}$.

11. $-2\cos x\cdot e^{\cos x}+2e^{\cos x}+C$.

12. $\alpha \in \left(1;\frac{8}{3}\right)$: $x \to 0$ $f(x,\alpha) \sim \frac{\text{const}}{x^{\alpha-5/3}}$;

$$x \to +\infty \quad f(x,\alpha) \sim \frac{\text{const}}{x^{\alpha}\ln^{1/3}x}.$$

13. Сходится поточечно на E_1 и E_2: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x - \operatorname{ch} x}}$.

Сходится равномерно на $E_1 = (0;1)$: $|u_n(x)| < \left(\frac{e}{5}\right)^n$.

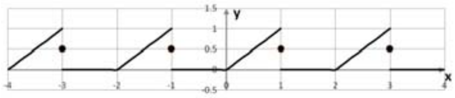
Сходится неравномерно на $E_2 = (1;+\infty)$:

$\left|u_n\left(5^n\right)\right| = (5e)^n \sin 1 \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

14. π.

15. $f(x) = \frac{1}{4} - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos\pi(2k-1)x}{\pi^2(2k-1)^2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin\pi kx$.

Ряд сходится неравномерно



16. $\pi\sin 1$;

$I = 2\pi i\left(\underset{0}{res} f(z) + \underset{-i}{res} f(z)\right) = -2\pi i\left(\underset{i}{res} f(z) + \underset{\infty}{res} f(z)\right)$;

$\underset{i}{res} f(z) = -i\frac{\sin 1}{2}$, $\underset{\infty}{res} f(z) = -C_{-1} = 0$.

17. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\left[t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]e^{-t}$.

18. Общее решение: $y(x) = x^2\ln x + C_1x^2 + C_2x$.

Решение ЗК: $y(x) = x^2\ln x + x^2$.

19. $u(-3,-2) = -13$ – min, $u(3,2) = 13$ – max.

20. Замена $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2y$, $z_{uv} = -1$.

ЛИТЕРАТУРА

21. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. Часть 1. – М.: МФТИ, 2004. – 327 с.; Часть 2. – М.: МФТИ, 2005. – 213 с.
22. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Часть 1. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 259 с.; Часть 2. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 230 с.
23. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: в 2 т. – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2005.
24. Никольский С.М. Курс математического анализа. – 6-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
25. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – 2. изд., перераб. – М.: МФТИ, 2000. – 716 с.
26. Яковлев Г.Н. Лекции по математическому анализу. Часть 1. – М.: Физматлит, 2001. – 399 с.; Часть 2. – М.: Физматлит, 2001. – 479 с.
27. Формула Тейлора и ее применение при вычислении пределов функций: учебно-методическое пособие / сост. Иванова С.В. Под ред. М.И. Шабунина. – М.: МФТИ, 2006. – 67 с.
28. Рациональные методы решения задач по математическому анализу. Методические указания и оптимальные алгоритмы решения экзаменационных задач 1-го семестра 1-го курса / сост. Л.И. Коваленко. – М.: МФТИ, 2007. – 52 с.
29. Построение графиков функций и кривых: учебно-методическое пособие / сост. С.В. Иванова. – М.: МФТИ, 2007. – 78 с.
30. Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных: учебно-методическое пособие / сост. А.Ю. Петрович. – М.: МФТИ, 2007. – 66 с.
31. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Издание 11-е, исправленное. – М.: Физматлит, 2007. – 307 с.
32. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2007. — 570 с.
33. Чехлов В.И. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: МФТИ, 2000. — 260 с.
34. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

35. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.
36. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М: ГТТИ, Физматлит, 1959. – 473 с.
37. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
38. Ипатова В.М., Пыркова О.А., Седов В.Н. Дифференциальные уравнения. Методы решений: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 140 с.
39. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие. – М.: Физматкнига, 2003. – 208 с.
40. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 248 с.
41. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Методические указания по решению задач курса ТФКП. – М.: МФТИ, 2007. – 78 с.