

Семестровая контрольная работа по ТФКП

5 семестр 2017-18 уч. год
(все факультеты кроме ФРТК и ФИВТ)

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Фамилия проверяющего	
--------------	--	-------------------------	--

1 (3) Функцию

$$f(z) = \frac{6z}{z^2+16} + \frac{i-3-4z}{(z+1+i)(z-4i)}$$

разложить в ряд Лорана по степеням $(z - i + 1)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 3 - 3i$. Указать максимальное кольцо сходимости.

2 (4) Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin \frac{3\pi z}{2}}{(\cos 2\pi z - \cos \pi z)(\cos \frac{4\pi^2}{z} - 1)} e^{\frac{1}{\sin \pi z}},$$

определить их тип, для полюсов установить их порядок.

3 (3) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=3} \frac{(z-2i)^2 \sin \frac{z}{z-2i}}{(z+4i)^2} dz$$

4 (3) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{(x-2i)(x^2-ix+2)} dx$$

5 (4) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} \frac{x-5}{(x+1)^2} dx$$

6 (4) Пусть $g(z)$ –регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{z^2 + 9}\}$ в комплексной плоскости с разрезом по лучам $\{z: z = 3i + (1-i)t, t \geq 0\}$ и $\{z: z = -3i - (1-i)t, t \geq 0\}$, такая, что $\arg g(-4) = 0$.

Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{dz}{\left(g(z) + 3 + \frac{z}{2}\right)^2},$$

где $\Gamma_1 = \{z: |z| = 1\}$ и $\Gamma_2 = \left\{z: |z - 4| = \frac{1}{2}\right\}$ окружности, ориентированные против хода часовой стрелки.

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»
С положением ознакомлен: _____ (Подпись студента)

ОТВЕТЫ

Вариант 1

$$1(3) \quad f(z) = \frac{3}{z+4i} + \frac{-1}{z+1+i} = \sum_{-\infty}^{-1} [3(1-5i)^{-n-1} - (-2i)^{-n-1}] (z-i+1)^n.$$

$$\sqrt{26} < |z-i+1|.$$

2(3) $\{n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ – C.O.T.
 $\left\{ \frac{2\pi}{m}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, \right\}$ – П2;
 $\left\{ \frac{2l}{3}, l \neq 3n, n \in \mathbb{Z} \right\}$ – У.O.T.;
 $\{0, \infty\}$ – H.O.T.

3(4) $I = -2\pi i (\text{res}_{-4i}^{\text{res}} + \text{res}_{\infty}^{\text{res}}) f(z).$ $\text{res}_{-4i}^{\text{res}} f(z) = -12i \sin \frac{i}{3} - 2 \cos \frac{i}{3} = 12 \text{sh} \frac{1}{3} - 2 \text{ch} \frac{1}{3},$
 $\text{res}_{\infty}^{\text{res}} f(z) = -2.$ $I = 4\pi i \left(\text{ch} \frac{1}{3} - 6 \text{sh} \frac{1}{3} + 1 \right)$

4(3) $I = \frac{\pi}{9} (-4e^{-2} + e^{-1})$

5(4) $I = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}} ((\text{res}_{-1}^{\text{res}} + \text{res}_{\infty}^{\text{res}}) F(z)) = \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - 1 \right).$ $F(z) = \frac{g(z)(z-5)}{(z+1)^2},$

$g(z) \in \left\{ \sqrt{\frac{2-z}{z-1}} \right\}$ – пер. ветвь. $z \in \mathbb{C} \setminus \{ \overline{B_r(1)} \cup [1+r, 2] \},$ $\text{res}_{-1}^{\text{res}} F(z) = -i \frac{\sqrt{6}}{4},$

$\text{res}_{\infty}^{\text{res}} F(z) = i.$

6(4) $I = 2\pi i (\text{res}_0^{\text{res}} + \text{res}_4^{\text{res}}) F(z) = \frac{16\pi i}{3} + 0 = \frac{16\pi i}{3}.$ $F(z) = \frac{1}{(g(z)+3+\frac{z}{2})^2}$

ФРТК и ФИВТ

5(4) $|z| < 1, N = 1.$ $|z| < 3, N = 3.$

a) $N = 2;$ б) $N = 1.$

6(4) $I = \pi i (\text{res}_i^{\text{res}} + \text{res}_{i\sqrt{7}}^{\text{res}}) \frac{1}{(z^2+1)(z^2+7)} = \frac{\pi}{12} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$

$\text{res}_i^{\text{res}} f(z) = -\frac{i}{12}$

$\text{res}_{i\sqrt{7}}^{\text{res}} f(z) = +\frac{i}{12\sqrt{7}}$