

Семестровая контрольная работа по ТФКП

5 семестр 2018-19 уч. год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Фамилия проверяющего	
--------------	--	-------------------------	--

1 (3) Функцию

$$f(z) = \frac{1-3z}{z^2+z-6} + \frac{2z+2i+9}{(z+3)(z-2i)}$$

разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 6+i$. Указать максимальное кольцо сходимости.

3 (3) Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{(z^2+2iz+3)}{1+\operatorname{ch} \pi z} e^{\left(\frac{1}{z-i}\right)},$$

определить их тип, для полюсов установить их порядок.

3 (3) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{4}} \left(\frac{4z^2-1}{\sin\left(\frac{\pi}{4z}\right)-1} \right) dz$$

4 (3) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos(3-2x)}{4x^2+4x+5} dx$$

5 (3) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{dz}{z^2|z-i|^4}$$

6 (2) Найти число корней уравнения

$$z^4 + z^2 - 5z - 1 = 0 \text{ вне замкнутого кольца } 1 \leq |z| \leq 2.$$

7 (4) Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\int_0^2 \sqrt[5]{\left(\frac{x}{2-x}\right)^3} \frac{dx}{x+1}$$

Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»
С положением ознакомлен: _____ (Подпись студента)

Ответы

Вариант 1

$$1(3) \quad f(z) = -\frac{1}{z-2} - \frac{3}{z+3} + \frac{3}{z-2i} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-2)^n. \quad 2\sqrt{2} < |z-2| < 5.$$

$$c_n = \begin{cases} 3(-5)^{-n-1}, & n \geq 0 \\ 2, & n = -1 \\ 3(2i-2)^{-n-1}, & n \leq -2. \end{cases}$$

$$2(3) \quad \{i\} - \text{C.O.T.}$$

$$\{-3i\} - \text{ПП1}$$

$$\{-i(1+2k), k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}\} - \text{ПП2.};$$

$$\{\infty\} - \text{H.O.T. (предельная точка полюсов)}$$

$$3(3) \quad I = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{1}{2}} f(z). \quad \operatorname{res}_{\frac{1}{2}} f(z) = -\frac{8}{\pi^2}, \quad I = -\frac{16}{\pi} i.$$

$$4(3) \quad I = \operatorname{Re} 2\pi i \left(\operatorname{res}_{i-\frac{1}{2}} f(z) \right) = \operatorname{Re} 2\pi i \frac{(z-1)e^{i(2z-3)}}{8z+4} \Big|_{z=i-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8e^2} (2\sin 4 - 3\cos 4)$$

$$5(3) \quad I = 2\pi i \operatorname{res}_i F(z) = \frac{\pi}{2}. \quad F(z) = \frac{-1}{(z-i)^2(z-3i)^2}.$$

$$6(2) \quad N=1. \quad (|z| < 1, \quad N=1; \quad |z| < 2, \quad N=4).$$

$$7(4) \quad I = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{-1} + \operatorname{res}_{\infty} \right) F(z) = \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{5}} \left(1 - 3^{-\frac{3}{5}} \right). \quad F(z) = \frac{g(z)}{z+1},$$

$$g(z) \in \left\{ \sqrt[5]{\left(\frac{z}{2-z} \right)^3} \right\} - \text{рег. ветвь. } z \in \mathbb{C} \setminus [0, 2], \quad g(1+i0) = 1, \quad \operatorname{res}_{-1} F(z) = 3^{-\frac{3}{5}} e^{i\frac{3\pi}{5}},$$

$$\operatorname{res}_{\infty} F(z) = -e^{i\frac{3\pi}{5}}.$$