

# 1. ТФКП З курс 5 семестр 1 задание

## 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Комплексные числа.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 3i$ .
- Решить уравнение  $2 \operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z = 3i$ .

## 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
- Указать точки в которых функция  $f(z) = \operatorname{Re} z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите  $\operatorname{Im} f(z)$ , если  $\operatorname{Re} f(z) = xy$ .

## 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Ряд Тейлора для регулярной функции.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

## 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \cos z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  функцию  $f(z)$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0 = -\frac{5}{2}$ :  
$$f(z) = \frac{i}{iz^2 + 5z - 6i} \cdot \frac{z(1+i)}{z^2 + 2(1-i)z - 4i}$$
. Указать границы кольца сходимости.

## 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = 0$  для функции  $\frac{1}{\sin^k z}$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .
- Исследовать особые точки функции:  $f(z) = \frac{e^{\operatorname{tg}(z)} \operatorname{ctg}(z)}{\operatorname{ctg}(2z)}$ . Ответ обосновать.



-----

## 2. ТФКП Зкурс 5семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Расширенная комплексная плоскость.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -2$ .
- Решить уравнение  $\frac{2i}{\sin z} - ctg z = -2i$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Условия Коши-Римана.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = \bar{z}$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $Re f(z) = x^2 - y^2 + 2x$ , если  $f(i) = -1 + 2i$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $ch^2 z - sh^2 z = 1$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = e^z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  функцию  $f(z)$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0 = 5$ :  $f(z) = \frac{i-2-iz}{z^2+(i-2)z-2i} + \frac{4i-3-i}{iz^2+2z+3i}$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2+1}{\sin(\pi iz)}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Исследовать особые точки функции:  $f(z) = \frac{(\pi z-1)^2 e^{\frac{1}{z}}}{(1+\cos\frac{1}{z})^2}$ . Ответ обосновать.



-----

### 3. ТФКП Зкурс 5семестр 1 задание

#### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Сфера Римана.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 1 + i$ .
- Решить уравнение  $3 \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg} z = 2i$ .

#### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Дифференцирование по комплексному переменному.
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $\operatorname{Re} f = x^2 - y^2$ ,  $f(0) = i$ .
- Найдите  $\operatorname{Re} f(z)$ , если  $\operatorname{Im} f(z) = y \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} y$ .

#### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема единственности для регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(-\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

#### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  функцию  $f(z)$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0 = \frac{5}{2}$ :  $f(z) = \frac{2z-4i}{iz^2+4z-4i} + \frac{z(i-1)-i}{z^2-z(3+2i)z+6i}$ . Указать границы кольца сходимости.

#### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = \frac{\pi}{2}$  для функции  $e^{\operatorname{tg} z}$ .
- Исследовать особые точки функции:  $f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z)e^{\operatorname{ctg}(z)}}{\operatorname{tg}(2z)}$ . Ответ обосновать.



-----

## 4. ТФКП Зкурс 5семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Последовательности и ряды.
- Найти модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -1 - i$ .
- Решить уравнение  $\frac{2i}{\cos z} - \operatorname{tg} z = 3i$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Многозначная функция  $\operatorname{Ln} z$ , ее регулярные ветви и риманова поверхность.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее мнимой части  $\operatorname{Im} f(z) = 10xy - 6y$ , если  $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Понятие об аналитическом продолжении.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ .
- Функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  обращается в нуль на множестве точек  $z_k = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), но  $f(z)$  не тождественно равна нулю. Почему этот факт не противоречит теореме единственности?

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{1+z}$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  функцию  $f(z)$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0 = \frac{5i}{2}$ :  $f(z) = \frac{z(i-3)-4-6i}{z^2+6iz-} + \frac{2z-4i-9}{z^2+z(4i-3)-12i}$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2+\pi^2}{z^2(e^z+1)}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Исследовать особые точки функции:  $f(z) = \frac{(2-\pi z)^3 e^{\frac{1}{z^2}}}{(1-\sin \frac{1}{z})^3}$ . Ответ обосновать.

## 5. ТФКП З курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Комплексные числа.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 2 + 5i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $\cos^2 z + 1 = 0, z \in C$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Многозначная функция  $\sqrt[n]{z}$ , ее регулярные ветви и риманова поверхность.
- Указать точки в которых функция  $f(z) = |z|^2$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ . Указать точки в которых функция  $f(z) = |z|^2$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите  $Im f(z)$ , если  $Re f(z) = x^2 - y^2 + xy$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Ряд Тейлора для регулярной функции.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in C$  справедлива формула  $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n$  ( $n \in N$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \sin z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 1 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{2z-i}{(z+i)^2} \frac{5z-4+3i}{z^2+z(i-2)-2i}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = \frac{3}{2}$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z-\pi}{\sin 2z-2 \sin z}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{\cos^3\left(\frac{14\pi}{3iz-z^2}\right)}{\left(i+\sin\frac{\pi z}{z}\right)^2}$ , определить их тип. Ответ обосновать.

✂

-----

## 6. ТФКП Зкурс 5семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Расширенная комплексная плоскость.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 2 - 5i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $\cos z + \sin z = \frac{3\sqrt{2}}{4}i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Какова связь между дифференцируемостью и регулярностью функции  $f(z)$  в точке  $z = a$ ?
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $\operatorname{Im} f = x^2 + y^2$ ,  $f(0) = 0$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее мнимой части  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , если  $f(1) = 0$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать **все** возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$  в ряд Лорана по степеням  $(z+1)$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 1)$  функцию  $f(z) = \frac{-4-2i}{(z+1+2i)(z-3)}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = -1 - 5i$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{ch} z + 1}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Исследовать особые точки функции  $f(z) = \frac{e^{\sin z}}{\cos \frac{1}{z}}$ . Ответ обосновать.

## 7. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Сфера Римана.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -2 + 5i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $tg z = \frac{2}{\sqrt{3}} - i, z \in C$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Теорема об обратной функции.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = x^2 + iy^2$  ( $z = x + iy$ ) дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите  $Re f(z)$ , если  $Im f(z) = y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема единственности для регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in C$  справедлива формула  $\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in N$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - i)$  функцию  $f(z) = \frac{3z}{z^2 - 2iz + 8} + \frac{4i}{z^2 + 4}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 1$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = 0$  для функции  $\frac{z}{\cos z - 1}$ .
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{z \cdot e^{\frac{1}{\sin z}}}{(2z + \pi) \sin z \cdot \cos 2z}$ , определить их тип. Ответ обосновать.



-----

## 8. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Первая теорема Абеля.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -2 - 5i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $\sin z = \cos z - \frac{i}{2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Дифференцирование сложной функции.
- Указать точки в которых функция  $f(z) = Im z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $Re f(z) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$ ,  $f(0) = 0$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Интегральная формула Коши (Интеграл Коши).
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos 3z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(-\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z}$  в ряд Лорана по целым степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{i}{z^2 + (6-i)z + 9-3i} + \frac{2z}{z^2-9}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = -2$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{1-\cos z}{1-e^{2iz}}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{tg \cdot e^{tg}}{tg^4}$ , определить их тип. Ответ обосновать.



## 9. ТФКП З курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Комплексные числа.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 1 + i^{121}$ .
- Решить уравнение  $z^2 - \sqrt{3}z|z| + |z|^2 = 0$ . Изобразить полученное решение на комплексной плоскости.

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Сопряженные гармонические функции двух переменных.
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $Re f = xy$ ,  $f(1) = 1$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $Re f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Ряд Тейлора для регулярной функции.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\sin z = \sin(\pi - z)$ .
- Функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  обращается в нуль на множестве точек  $z_k = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), но  $f(z)$  не тождественно равна нулю. Почему этот факт не противоречит теореме единственности?

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1 + i)$  функцию  $f(z) = \frac{4i}{z^2+2iz+1} + \frac{z-3i}{z^2+1}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 0$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = -\frac{\pi}{2}$  для функции  $e^{tg z}$ .
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{(2z-\pi) \cdot e^{\frac{1}{\cos z}}}{z \cdot \cos 2z \cdot \cos z}$ , определить их тип. Ответ обосновать.



-----

## 10. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Расширенная комплексная плоскость.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = \frac{1-i}{1+i}$ .
- Решить уравнение  $z^2 + z|z| + |z|^2 = 0$ . Изобразить полученное решение на комплексной плоскости.

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Понятие функции регулярной (голоморфной) в области.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = Re z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $Re f(z) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $f(1) = 2$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

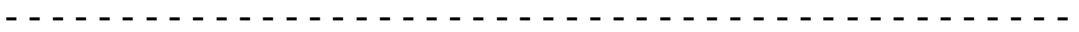
- Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos z = -\cos(\pi - z)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = sh z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1)$  функцию  $f(z) = \frac{1}{z^2 + (i-4)z + 4 - 2i} + \frac{2iz}{z^2 - 4}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 2i$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{1}{1 - \cos z} - \frac{1}{z}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{ctg z \cdot e^{ctg z}}{ctg 4z}$ , определить их тип. Ответ обосновать.



## 11. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Теорема Вейерштрасса.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 3i$ .
- Решить уравнение  $z^2 + \sqrt{3}z|z| + |z|^2 = 0$ . Изобразить полученное решение на комплексной плоскости.

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Условия Коши-Римана.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = \bar{z}$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите  $Im f(z)$ , если  $Re f(z) = xy$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема единственности для регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos z = -\cos(\pi - z)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 2 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 1}{z^2(z+3i)}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 5 + i$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = 0$  для функции  $e^{ctg z}$ .
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2 \sin^2 z \cdot \sin\left(\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}\right)}{(\cos z - 1)^2} e^{\sin z/z}$ , определить их тип. Ответ обосновать.

✂ -----

## 12. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Последовательности и ряды.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -2$ .
- Решить уравнение  $z^2 - z|z| + |z|^2 = 0$ . Изобразить полученное решение на комплексной плоскости.

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Дифференцирование по комплексному переменному.
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $Re f = x^2 - y^2$ ,  $f(0) = i$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $Re f(z) = x^2 - y^2 + 2x$ , если  $f(i) = -1 + 2i$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Понятие об аналитическом продолжении.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\sin z = \sin(\pi - z)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{z}$  в ряд Лорана по степеням  $(z-1)$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 3 + 5i)$  функцию  $f(z) = \frac{16-z^2}{z(z+4i)^2}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = -1 - i$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{1}{\cos z - 2}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{\left(\frac{z-\pi}{2}\right)^3 \cos z \cdot \cos\left(\frac{1}{z-\pi}\right) e^{\cos z}}{(\sin z - )^2} e^{i\left(\frac{z-\pi}{2}\right)}$ , определить их тип. Ответ обосновать.

✂ -----

### 13. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

#### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Комплексные числа
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 1 + i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $\sin z = 2, z \in \mathbb{C}$ .

#### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Многозначная функция  $\operatorname{Ln} z$ , ее регулярные ветви и риманова поверхность
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите  $\operatorname{Re} f(z)$ , если  $\operatorname{Im} f(z) = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x$ .

#### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Ряд Тейлора для регулярной функции.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos 3z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(-\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

#### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{z^5} \cos z$  в ряд Лорана по целым степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1 - 3i)$  функцию  $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z(z - 2i)^2}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 1$ . Указать границы кольца сходимости.

#### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = \infty$  для функции  $\frac{1}{\cos z}$ .
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{z \sin^3 z \cdot \cos\left(\frac{1}{1-z}\right)}{(\cos z - )^2} e^{\sin^2 z / z^2}$ , определить их тип. Ответ обосновать.

-----

## 14. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Расширенная комплексная плоскость.
- Найти модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -1 - i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $chz = -\frac{1}{2}$ ,  $z \in C$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Многозначная функция  $\sqrt[n]{z}$ , ее регулярные ветви и риманова поверхность.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = |z|^2$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее мнимой части  $Im f(z) = 10xy - 6y$ , если  $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in C$  справедлива формула  $\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z$ .
- Функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  обращается в нуль на множестве точек  $z_k = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), но  $f(z)$  не тождественно равна нулю. Почему этот факт не противоречит теореме единственности?

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \cos z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 2 + 2i)$  функцию  $f(z) = \frac{2z^2 + iz + 5}{z^2(z - 5i)}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 1 + i$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z - \pi}{\sin 2z - 2 \sin z}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{\left(\frac{z - \pi}{2}\right)^2 \cos^2 z \cdot \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}{(\sin z - 1)^2} e^{\cos^2 z} / \left(\frac{z - \pi}{2}\right)^2$ , определить их тип. Ответ обосновать.

✂ -----

## 15. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Сфера Римана.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 2 + 5i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $e^z = 1 - 3i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Какова связь между дифференцируемостью и регулярностью функции  $f(z)$  в области  $D$ ?
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $Im f = x^2 + y^2$ ,  $f(0) = 0$ .
- Найдите  $Im f(z)$ , если  $Re f(z) = x^2 - y^2 + xy$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема единственности для регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = e^z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + i)$  функцию  $f(z) = \frac{(i-2)z-2}{2iz^2-(6+i)z+3}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = i - 1$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = 0$  для функции  $\frac{1}{\sin^k z}$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .
- Исследовать особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{shz} \left( \exp\left(\frac{\pi}{2z}\right) - e \right) tgz$ . Ответ обосновать.

-----

## 16. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Последовательности и ряды.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 2 - 5i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $chz + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Теорема об обратной функции.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = x^2 + iy^2$  ( $z = x + iy$ ) дифференцируема, и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее мнимой части  $Im f(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , если  $f(1) = 0$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Понятие об аналитическом продолжении.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f(1/n) = \sin(\pi n/2)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать **все** возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 1 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{(1+3i)z+i}{3z^2+(6i-1)z-2i}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 4i - 1$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2+1}{\sin(\pi iz)}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Исследовать особые точки функции  $f(z) = \frac{4z^2+9\pi^2}{chz} \left( \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) - 1 \right) \operatorname{ctgz}$ . Ответ обосновать.



## 17. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Комплексные числа.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -2 + 5i$ .
- Решить уравнение  $2 \operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z = 3i$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Дифференцирование сложной функции.
- Указать точки в которых функция  $f(z) = \operatorname{Im} z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ . Указать точки в которых функция  $f(z) = \operatorname{Im} z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите  $\operatorname{Re} f(z)$ , если  $\operatorname{Im} f(z) = y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Ряд Тейлора для регулярной функции.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{1+z}$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1 + i)$  функцию  $f(z) = \frac{(2+2i)z+5}{2z^2+(4-i)z-2i}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 3 + 2i$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = -\frac{\pi}{2}$  для функции  $e^{\operatorname{tg} z}$ .
- Исследовать особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{sh} 2z} \left( \exp\left(\frac{\pi}{z}\right) - e^2 \right) \operatorname{tg}^2 z$ . Ответ обосновать.

✂ -----

## 18. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Расширенная комплексная плоскость.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = -2 - 5i$ .
- Решить уравнение  $\frac{2i}{\sin z} - ctg z = -2i$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Сопряженные гармонические функции двух переменных.
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $Re f = xy$ ,  $f(1) = 1$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $Re f(z) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$ ,  $f(0) = 0$

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(-\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Разложить функцию  $f(z) = \sin z$  по степеням  $z$  в ряд Лорана а) в кольце  $\{0 < |z| < 1\}$ , б) в кольце  $\{1 < |z| < +\infty\}$ .
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 2 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{(i-3)z+4i}{3iz^2+(1+9i)z+3}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = i$ . Указать границы кольца сходимости. Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2+\pi^2}{z^2(e^z+1)}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Исследовать особые точки функции  $f(z) = \frac{4z^2+\pi^2}{ch3z} \left( \exp\left(\frac{z}{z-2}\right) - 1 \right) ctg^2 z$ . Ответ обосновать.

## 19. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Первая теорема Абеля.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 1 + i^{121}$ .
- Решить уравнение  $3 \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg} z = 2i$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Понятие функции регулярной (голоморфной) в области.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = \operatorname{Re} z$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по заданной ее действительной части  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Теорема единственности для регулярных функций.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ .
- Функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  обращается в нуль на множестве точек  $z_k = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), но  $f(z)$  не тождественно равна нулю. Почему этот факт не противоречит теореме единственности?

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать **все** возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$  в ряд Лорана по степеням  $(z+1)$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z-3)$  функцию  $f(z) = \frac{2z+i}{(z+2i)^2} + \frac{z+8+6i}{z^2+2z(i-2)-8i}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 0$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2+\pi^2}{z^2(e^z+1)}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{iz-z^2}\right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{z}}-1\right)^3}$ , определить их тип. Ответ обосновать.



-----

## 20. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Радиус и круг сходимости степенного ряда.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = \frac{1-i}{1+i}$ .
- Решить уравнение  $\frac{2i}{\cos z} - \operatorname{tg} z = 3i$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Условия Коши-Римана.
- Указать точки, в которых функция  $f(z) = \bar{z}$  дифференцируема и вычислить в них  $f'(z)$ .
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = \frac{1-i}{1+i}$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Какова связь между дифференцируемостью и регулярностью функции  $f(z)$  в точке  $z = a$ ?
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедлива формула  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f(1/n) = \cos \pi n/n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать все возможные разложения функции  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^2} - \frac{i+z(1-4i)}{z^2 - z(1+3i) + 3i}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = 0$ . Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Найти и исследовать все особые точки функции  $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{ch z + 1}$  (если есть полюса, то указать их порядок).
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{sh^3\left(\frac{6\pi}{z+iz^2}\right)}{(1-ch2\pi z)^2}$ , определить их тип. Ответ обосновать.

## 21. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

### 1. Комплексные числа. Элементарные функции. Функциональные ряды.

- Комплексные числа.
- Найдите модули  $r$  и аргументы  $\phi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  - действительные числа):  $z = 3i$ .
- Найти все решения уравнения (или объяснить, почему их нет):  $\cos^2 z + 1 = 0, z \in C$ .

### 2. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства.

- Дифференцирование по комплексному переменному.
- Найти все регулярные функции  $f(z)$ , для которых  $Re f = x^2 - y^2, f(0) = i$ .
- Найдите  $Im f(z)$ , если  $Re f(z) = xy$ .

### 3. Ряд Тейлора. Теорема единственности.

- Ряд Тейлора для регулярной функции.
- Докажите с помощью теоремы единственности, что для любого  $z \in C$  справедлива формула  $ch^2 z - sh^2 z = 1$ .
- Существует ли функция  $f(z)$  регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая указанному условию:  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2} (n \in N)$ . Если да, то выписать эту  $f(z)$ . Если нет, то объяснить почему.

### 4. Ряд Лорана.

- Выписать **все** возможные разложения функции  $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z}$  в ряд Лорана по целым степеням  $z$ . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- Разложить в ряд Лорана по степеням  $(z + 2 - i)$  функцию  $f(z) = \frac{2z-i}{(z-i)^2} - \frac{z+4+i}{z^2+z(2-i)-2i}$  в кольце, которому принадлежит точка  $z = -1$ . Найти радиусы кольца сходимости. Указать границы кольца сходимости.

### 5. Особые точки однозначного характера.

- Указать тип особой точки  $z = 0$  для функции  $\frac{z}{\cos z - 1}$ .
- Найти все особые точки функции  $f(z) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2z^2+z}\right)}{\left(\frac{i\pi}{e^{2z}-i}\right)^3}$ , определить их тип. Ответ обосновать.