



1. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание

1. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = x - y^3 x$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Выписать $K(x, y)$.
3. Решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2 \sin 3x \sin 6y) \varphi(y) dy - 3 \cos 9x + 2 \sin 9x$. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$, $0 < x < \ln 2$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y'(\ln 2) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{x \mid x < R\}$ с плотностью $\rho = \rho(|x|)$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x \mid x < R\}$, но и вне его.



2. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание

1. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = 1$ ($x, y \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (10|x|^2 - 6|x||y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|$, $|x| < 1$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $-(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На сфере радиуса R распределены диполи с плотностью момента $\nu = \cos \theta$, ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси $\theta = 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$).



3. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Дано ядро $K(x, y) = -1$ ($x, y \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать $K^*(x, y)$.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ : $u(x) = \lambda \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2 y^2} - 1 \right) u(y) dy + 3x^2 - 4$, $u(x) \in C[1, 2]$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}$, $0 < x < 2$, $y(0) - 2 \ln 2 y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{x \mid |x| = R\}$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x \mid |x| < R\}$, но и вне его.



4. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ : $u(x) = \lambda \int_0^1 (2\sqrt{xy} - 1) u(y) dy + 10x - 9$, $u(x) \in C[0, 1]$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению: $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{x \mid |x| < R\}$ с постоянной плотностью. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x \mid |x| < R\}$, но и вне его.



5. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить

интегральное уравнение при всех возможных λ : $u(x) = \lambda \int_{1/2}^1 \left(\frac{3x^2}{y^2} - 8 \right) u(y) dy - 6x^2 + 7$, $u(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.

2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:

$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция.

3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{x\} = R$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x\} < R$, но и вне его.



6. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральные уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить

интегральное уравнение при всех возможных λ : $u(x) = \lambda \int_0^{\ln 2} \left(\frac{2}{3} e^{3x-y} - 3e^y \right) u(y) dy + 4e^{3x} - 18$, $u(x) \in C[0, \ln 2]$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.

2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $-y'' + \frac{2}{x} y' = \lambda x^3 y$, $0 < x < 1$,

$$y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$

3. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса R распределены диполи с постоянной плотностью момента, ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных x_3 . Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска.



7. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5x^2 y^3 + 7x^3 y^2) u(y) dy + 5x + 7x^4$, $u(x) \in C[-1, 1]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -x^2 y'' - 2xy' = \lambda y, & 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, & y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$, $-1 < x < 0$, $y'(-1) = 0$, $y'(0) + \alpha y(0) = 0$, где $\alpha > 0$, $f(x) \in C[-1; 0]$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{x \mid |x| < R\}$ с постоянной плотностью. Рассмотреть случай $n=2$. Определить потенциал не только в шаре $\{x \mid |x| < R\}$, но и вне его.



8. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 t + \sin x (t^2 - t^4) \operatorname{cost}) y(t) dt + f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, $y \in L_2([-1, 1])$, $f \in L_2([-1, 1])$, $\lambda \in \mathbb{R}$ выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y) u(y) dy + 3 \sin x + \cos x$, $u(x) \in C[-\pi, \pi]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $y(1) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На круглом диске радиуса R распределен простой слой с плотностью $\mu = r^2$. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.



9. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма в общем случае.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = x - y^3x$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Выписать $K(x, y)$.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy^2 + 5x^2y)u(y)dy + 5x^3 - 7x^4$, $u(x) \in C[-1, 1]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(1) = 0$, где $\alpha > 0$, $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция.

3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с плотностью $\rho = |x|$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.



10. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с эрмитовыми ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = 1$ ($x, y \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{2} x \cos y + y \cos x \right) u(y) dy + x^2 + 2\pi \sin x$, $u(x) \in C[-\pi, \pi]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-\frac{1}{x} y'' + \frac{1}{x^2} y' + \frac{3}{x^3} y = \lambda \sin x y + e^x$, $1 < x < 2$, $y'(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$ в точке лежащей на оси x_3 .

11. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром.
2. Дано ядро $K(x, y) = -1$ ($x, y \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать $K^*(x, y)$.
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 - x^2y^2)\rho(y)dy + ax^2 + x^3$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(-1) = 0$, $y'(0) = 0$, где $f(x) \in C[-1; 0]$.

3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$ в точке лежащей на оси x_3 .



12. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Теорема о существовании характеристических чисел.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x)\rho(y)dy + ax + \cos x$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-\frac{1}{\cos x} y'' + \frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{\cos x} y' = \lambda y + f(x)$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{x\} = R$. Рассмотреть случай $n=2$. Определить потенциал не только в шаре $\{x\} < R$, но и вне его.



13. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Теорема Гильберта-Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y^2 - xy) \rho(y) dy + x^3 + a$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $-(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$

3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с плотностью $\rho = \sqrt{|x|}$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.



14. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральные уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos y + y \sin x) \rho(y) dy + \cos x + a \sin x$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}, \quad 0 < x < 2, \quad y(0) - 2 \ln 2 y'(0) = 0, \quad y'(2) = 0.$

3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Для сферического слоя $R_1 < |x| < R_2$ вычислить объемный потенциал масс, распределенных с постоянной плотностью.



15. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Найти решение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(\sin^3 x \cdot \frac{\text{sh } y}{y} + x \text{ch } x(y^2 + 2) e^{y^2} \right) \varphi(y) dy + f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. При каких $f(x) \in C([-1,1])$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -x^2 y'' - 2xy' = \lambda y, & 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, & y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению: $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса R распределен простой слой с плотностью $\mu = \mu(\phi)$ - непрерывная 2π -периодическая функция. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.



16. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x e^{x^2} \text{sh}^4 t + \sin x(t^2 - t^4) \cos t) y(t) dt + f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, $y \in L_2([-1,1])$, $f \in L_2([-1,1])$, $\lambda \in \mathbb{R}$ выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + x^3) \varphi(y) dy + 2 \cos x$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция.

3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$ в \mathbb{R}^3 .



17. УМФ З курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = x - y^3 x$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Выписать $K(x, y)$.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (24x^3 y^2 - 14x + 3)\rho(y)dy - 12x^3 + 1, 0 \leq x \leq 1$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $-y'' + \frac{2}{x}y' = \lambda x^3 y, 0 < x < 1,$
 $y'(0) = 0, y(1) - y'(1) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{x | < R\}$ с плотностью $\rho = e^{-|x|}$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x | < R\}$, но и вне его.



18. УМФ З курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = 1$ ($x, y \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}$). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти решение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xe^{x^2} \operatorname{sh}^4 y + \sin x(y^2 - y^4)\cos y)\rho(y)dy + f(x), -1 \leq x \leq 1$. При каких $f(x) \in C([-1, 1])$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x), -1 < x < 0,$
 $y'(-1) = 0, y'(0) + \alpha y(0) = 0$, где $\alpha > 0, f(x) \in C[-1; 0]$.

3. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{x | < R\}$ с плотностью $\rho = \rho(|x|)$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x | < R\}$, но и вне его.

19. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Дано ядро $K(x, y) = -1$ ($x, y \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать $K^*(x, y)$.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\operatorname{sh} x + x^2 y^2) \varphi(y) dy - 3$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $y(1) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На сфере радиуса R распределены диполи с плотностью момента $v = \cos \theta$, ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси $\theta = 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$).



20. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (3x^2 - 6xy + 1) \varphi(y) dy + 4x - 1$, $0 \leq x \leq 1$.

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля:
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(1) = 0$, где $\alpha > 0$, $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция.

3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{x\} = R$. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x\} < R$, но и вне его.



21. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



1. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти решение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(x \operatorname{sh}^2 x \cdot \frac{\sin^3 y}{y} + \sin^3 x \cdot y^2 \operatorname{ch} y \right) \varphi(y) dy + f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. При каких $f(x) \in C([-1,1])$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-\frac{1}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y' + \frac{3}{x^3}y = \lambda \sin xy + e^x$, $1 < x < 2$,
 $y'(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{x \mid |x| < R\}$ с постоянной плотностью. Рассмотреть случай $n=3$. Определить потенциал не только в шаре $\{x \mid |x| < R\}$, но и вне его.

