ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики** **Курс** 3 **Семестр** 6

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов		**Фамилия проверяющего**	

1. (7) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно (считать, что $2y\cos x - \sin x > 0$)

$$2\sin x\, u_{xx} - (\sin x + 2y\,\cos x)\, u_{xy} + y\,\cos x\, u_{yy} + \frac{2y + \sin x\cos x}{\sin x - 2y\cos x}(u_y - 2u_x) = (2y\cos x - \sin x)^2;$$

$$u|_{y=1} = 1 - x\sin x, \quad 0 < x < \pi/2; \qquad u_y|_{y=1} = -(x+2)\sin x, \quad 0 < x < \pi/2.$$

---

2. (5) Решить задачу $4u_{tt} = u_{xx} - 3\,\mathrm{sh}(x+t), \qquad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \sin 2x - \mathrm{sh}\, x, \quad u_t|_{t=0} = 2 - \mathrm{ch}\, x, \qquad x \geqslant 0;$$

$$(u_x - 2u)|_{x=0} = 2 - 4t + 2\,\mathrm{sh}\, t - \mathrm{ch}\, t, \qquad t \geqslant 0.$$

---

3. (4) Решить задачу Коши с краевыми условиями для волнового уравнения на интервале $x \in (0, \pi)$:

$$u_{tt} = u_{xx} + g(t,x),\ t > 0; \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = -\pi t; \quad u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = -x,$$

где

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}\sin(kx), \quad g(t,x) = t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin(kx).$$

---

4. (4) Решить задачу $\Delta u = \dfrac{4}{r^4}\sin 2\varphi, \qquad 1 < r = \sqrt{x^2+y^2} < 2, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

$$u|_{r=1} = 6\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$

$$u|_{r=2} = -\frac{\ln 2}{4}\sin 2\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \quad (x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi).$$

---

5. (5) Решить задачу $u_{tt} = 9\Delta u + x^2yzt^2, \qquad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = (x - 2y - 2z)^3, \quad u_t|_{t=0} = e^{-z}(x^3 - 3xy^2); \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

---

6. (7) Найти значение a, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(\frac{3}{5}y - \sqrt{xy}\right)\varphi(y)\,dy + ax + 1,$$

разрешимо при любом λ. Найти решения при этом значении a. Найти также характеристические числа и собственные функции ядра этого интегрального уравнения.

---

7. (6) Пусть $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$, $D = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant r < 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$. Решить при каждом $\omega > 0$ задачу:

$$u_{tt} = \Delta u \ \text{ в } \ \mathbb{R}^+ \times D; \quad u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = 0 \text{ в } D; \quad u|_{r=1} = \cos\omega t - 1 \ \text{ при } t \in \mathbb{R}^+, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

1.(7) $\xi = y\sin x\,,\ \eta = x + 2y\colon\ \tilde{u}_{\xi\eta} = -1\,;\ u(x,y) = f(y\sin x) + g(x+2y) - y\sin x(x+2y)\,.$

$f(\alpha) = 2\alpha\,,\ g(\beta) = 1\,.$ $\boxed{u = 2y\sin x + 1 - y\sin x\,(x+2y)}$

в области $D = \{(x,y)\mid 0 < y\sin x < 1\,;\ 2 < x + 2y < 2 + \frac{\pi}{2}\,,\ \sin x - 2y\cos x < 0\}$

2.(5) $u(x,t) = -\operatorname{sh}(x+t) + \frac{1}{2}\sin(2x+t) + (2x+t) + \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(2x-t) - (2x-t), & 2x - t \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}e^{2x-t} + \frac{1}{2}\cos(2x-t) - (2x-t) - 1, & 2x - t < 0. \end{cases}$

3.(4) Замена: $u = v - xt\,.\ \ u = -xt + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t}{k^6} + \frac{1}{k^5}\cos(kt) - \frac{1}{k^7}\sin(kt)\right)\sin(kx).$

4.(4) $v = u - u_1 = u + \frac{\ln r}{r^2}\sin 2\varphi\,;\ \Delta v = 0\,,\ v|_{r=1} = 6\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\,,\ v|_{r=2} = 0\,;$

$v = A + B\ln r + \left(Cr + \frac{D}{r}\right)\cos\varphi = 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln r - \left(r - \frac{4}{r}\right)\cos\varphi$

5.(5) $u = \underbrace{x^2yz\frac{t^4}{12} + yz\frac{t^6}{20}}_{u_1} + \underbrace{(x-2y-2z)^3 + 243(x-2y-2z)t^2}_{u_2} + \frac{1}{3}\operatorname{sh}3t\,e^{-z}(x^3 - 3xy^2)\,.$

Иначе $\quad u_2 = \frac{1}{2}\left((x-2y-2z+3t)^3 + (x-2y-2z-3t)t^3\right)$

6.(7) $\varphi(x) = \frac{3}{5}\lambda C_1 - \lambda C_2\sqrt{x} + ax + 1\,.\ \begin{cases} \left(1 - \frac{3}{10}\lambda\right)C_1 + \frac{2}{5}\lambda C_2 = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}, \\ -\frac{2}{5}\lambda C_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)C_2 = \frac{2a}{5} + \frac{2}{3}. \end{cases}$

$\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -10}\,,\ \boxed{\varphi(x) = 5\sqrt{x} - 3}\,.$

При $\lambda = -10$ условие существования решения $\boxed{a = -\frac{5}{2}}\,,\ \boxed{\varphi(x) = C(5\sqrt{x} - 3) - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}\,.$

При $\lambda \neq -10\,,\ C_1 = C_2 = \frac{-10}{3(\lambda+10)}\,.$ $\boxed{\varphi(x) = \frac{2\lambda}{3(\lambda+10)}(5\sqrt{x} - 3) - \frac{5}{2}x + 1}$

7.(6) $u = v + \cos\omega t - 1 \Rightarrow v_{tt} = \Delta v + \omega^2\cos\omega t\,,\ v|_{t=0} = 0; v_t|_{t=0} = 0\,;\ v|_{r=1} = 0\,.$

$v = \sum\limits_{n=0,m=1}^{\infty}[A_{nm}(t)\cos n\varphi + B_{nm}(t)\sin n\varphi]\,J_n(\mu_{nm}r)\,,$ где $J_n(\mu_{nm}) = 0\,,$

$1 = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\chi_m J_0(\mu_{0m}r)\,,\ \chi_m = \frac{2}{[J_1(\mu_{0m})]^2}\int_0^1 J_0(\mu_{0m}r)\,r\,dr\,.\ \forall n,m\,,\ B_{nm} = 0\,,$

$A''_{nm}(t) + \mu^2_{nm}A_{nm}(t) = \omega^2\cos\omega t\chi_m\delta_{0n}\,,\ A_{nm}(0) = A'_{nm}(0) = 0\,,\ \forall n \neq 0, \forall m, A_{nm}(t) \equiv 0\,.$ Для $n = 0\,,$ если $\exists M\,,\ \omega = \mu_{0M}$ (**резонанс**) $A_{0M}(t) = \frac{1}{2}\chi_M\,\omega\,t\sin(\omega t)\,.$ Для $n = 0\,,\ \forall m\,,$

$\omega \neq \mu_{0m} \Rightarrow \forall m, A_{0m}(t) = \frac{\omega^2\chi_m}{\mu^2_{0m} - \omega^2}[\cos\omega t - \cos\mu_{0m}t]\,.$

$\boxed{\textbf{1) } \text{При } \omega \neq \mu_{0m}\quad u = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\omega^2\chi_m}{\mu^2_{0m} - \omega^2}[\cos\omega t - \cos\mu_{0m}t]J_0(\mu_{0m}r) + \cos\omega t - 1}\,.$

$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{2) } \text{При } \omega = \mu_{0M}\quad u = \cos\omega t - 1 + \\ + \sum\limits_{m=1,m\neq M}^{\infty}\frac{\omega^2\chi_m}{\mu^2_{0m} - \omega^2}[\cos\omega t - \cos\mu_{0m}t]J_0(\mu_{0m}r) + \frac{1}{2}\chi_M\mu_{0M}\,t\sin(\mu_{0M}t)J_0(\mu_{0M}r)\end{array}}\,.$