

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2022/2023 учебный год
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ③ Являются ли прямые $l_1 : x = 2 - t, y = 4 - 2t, z = -4 + t$; $l_2 : x = -3 + 2t, y = -4 + 3t, z = 3 - 3t$ пересекающимися? Составить уравнение общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2 . Система координат декартова прямоугольная.
-
2. ⑤ Найти ядро, размерность и базис множества значений и полный прообраз вектора $(2, 1, 5)$ для линейного отображения, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
-
3. ③ Найти матрицу перехода к базису из собственных векторов и матрицу преобразования в нем, если в исходном базисе матрица преобразования $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
-
4. ③ При всех значениях параметров α, β найти положительные и отрицательные индексы инерции квадратичной формы в 5-мерном пространстве $k(x) = \alpha x_1^2 + 6\beta x_2 x_3 + x_4^2 + 8x_4 x_5 + 16x_5^2$. При каких значениях параметров квадратичная форма будет положительно определенной, положительно полуопределенной?
-
5. ③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{1 - x^2} + \sin x - \ln(1 + x))^{\frac{1}{x^3} + \ln x}$.
-
6. ③ Найти асимптоты, точки локального экстремума и перегиба и построить график функции $y = 2x + 1 + \frac{8}{x - 1}$.
-
7. ② Вычислить интеграл $\int \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x) dx$.
-
8. ⑥ При всех значениях параметра α исследовать на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 + |x|^{\frac{1}{2}} |y|^\alpha), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$
-
9. ③ Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{x^2}{n^4}\right)$ на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$, $E_2 = (1, +\infty)$.
-

10.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(-10x^2 + x + 2)$ и найдите радиус сходимости полученного ряда.

11.② Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (-y \sin x + y^2) dx + (\cos x + 2xy) dy$, где Γ — кривая $\sin x = y^5$, соединяющая точки $A(0, 0)$ и $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, пробегаемая от точки A к точке B .

12.③ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (2x + 3y) dy dz + (x + y + z) dz dx + (x + 2y + 3z) dx dy,$$

где S — часть внешней стороны поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1, x \geq 0$.

13.④ Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -3x, & x \in (-\pi, 0), \\ 4x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

Построить график суммы и исследовать ряд Фурье на равномерную сходимость.

14.② Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами наименьшего порядка, имеющие частные решения $y_1 = e^{3x}, y_2 = xe^x \cos 2x$.

15.③ Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - 5y, \end{cases}$

16.③ Решить уравнение $-x^2 y'' + (x^2 + 2x)y' + (2x^2 - x - 2)y = 2x^3, x > 0$, если известны его частные решения $y_1 = x, y_2 = x + xe^{2x}$.

17.④ Найти допустимые экстремали

$$J(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 6y^2 + 10x^2 y) dx, \quad y(1) = 1, y(2) = 4 + 4 \ln 2.$$

18.⑤ Вычислить интеграл (обход контура против часовой стрелки): $\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} (z+1) \operatorname{ctg} z^2 dz$.

"Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено"

С положением ознакомлен: _____ (Фамилия студента)