①

XII.7.1● Какая задача и с какой погрешностью приближается схемой

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}.$$

Исследовать на устойчивость решение данного разностного уравнения.

Какая задача и с какой погрешностью приближается схемой

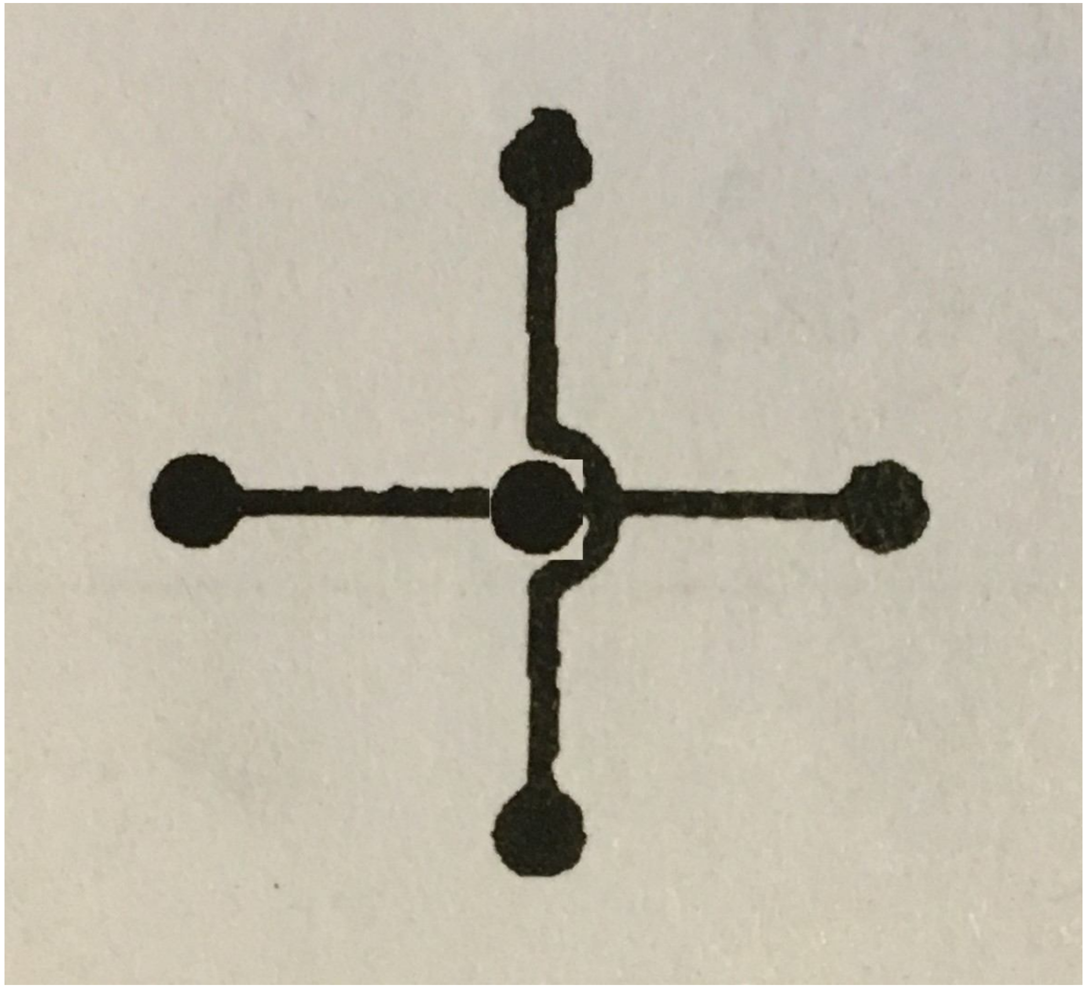
$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}.$$

Порядок аппроксимации схем исследуется разложением точного решения дифференциальной задачи в точках шаблона РС в ряд Тейлора для нахождения главных членов ошибки аппоксимации.

Обычно точкой, относительно которой берется разложение в ряд Тейлора, выбирается та,

- относительно которой все разложения делаются сравнительно просто,
- либо центр симметрии шаблона.

Совокупность расчетных узлов, используемых на каждом элементарном шаге вычислений в разностной схеме, называется **шаблоном**.



Делаем разложение относительно y_m^n (центр шаблона + удобная точка):

$$y_m^n \coloneqq u$$

$$y_{m\pm1}^n = u \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O\left(h^4\right),$$

$$y_m^{n\pm1} = u \pm \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} \pm \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right).$$

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}-\left(u-\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}-\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}\right)+O\left(\tau^4\right)}{2\tau} =$$

$$= \frac{2\tau u_t+2\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}+O\left(\tau^4\right)}{2\tau} = u_t+\frac{\tau^2}{6}u_{ttt}+O\left(\tau^3\right),$$

$$\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2} = \frac{u-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}-\frac{h^3}{6}u_{xxx}-2u+u+hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+\frac{h^3}{6}u_{xxx}+O\left(h^4\right)}{h^2} =$$

$$= \frac{2\frac{h^2}{2}u_{xx}+O\left(h^4\right)}{h^2} = u_{xx}+O\left(h^2\right).$$

Заметим, что $O\left(h^4\right)=2\cdot\frac{h^4}{4!}u_{xxxx}+O\left(h^6\right)$.

Тогда $u_{xx}+O\left(h^4\right) = O\left(h^4\right)=\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O\left(h^6\right)$.

$$0=\frac{y_m^{n+1}-y_m^{n-1}}{2\tau}-a^2\,\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2} = u_t+\frac{\tau^2}{6}u_{ttt}+O\left(\tau^3\right) -a^2\left[u_{xx}+\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O\left(h^4\right)\right] =$$

$$= u_t-a^2u_{xx}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}-a^2\,\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O\left(\tau^3\right)+O\left(h^4\right).$$

$u_t-a^2u_{xx}=0$ - уравнение теплопроводности (диффузии),

$\frac{\tau^2}{6}u_{ttt}-a^2\,\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O\left(\tau^3\right)+O\left(h^4\right)=O\left(\tau^2,h^2\right)$ - погрешность.

Исследовать на устойчивость решение данного разностного уравнения

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}.$$

📖 Федоренко гл. I §12.

Исследование на устойчивость основано на следующем общем факте: все линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами, заданные на всем пространстве (с условием ограниченности на бесконечности), имеют универсальное полное семейство частных решений

$$y_m^n = \lambda^n e^{im\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad (1)$$

Здесь φ - параметр семейства,

$$\lambda = \lambda(\tau, h, \text{"}схема\text{"}; \varphi).$$

Каждая схема характеризуется своей функцией $\lambda(\varphi)$ (остальные аргументы имеем в виду, не выписывая их явно).

Функция $\lambda(\varphi)$ называется ***спектральной функцией*** схемы.

Совокупность значений, пробегаемых $\lambda(\varphi)$ ($\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ в комплексной плоскости) называют ***спектром разностной схемы***.

Разностную схему называют ***спектрально устойчивой***, если

$$|\lambda(\varphi)| \le 1 + C\tau, \ \forall \varphi \in [0, 2\pi], \qquad (2)$$

где C - постоянная, не зависящая от τ.

Спектр устойчивой (по спектральному признаку) схемы должен лежать в $C\tau$ расширении единичного круга.

Разностную схему называют ***спектрально неустойчивой***, если существуют

- $q > 1$ (q не зависит от τ) и
- $\varphi^* \in [0, 2\pi]$,

такие, что

$$|\lambda(\varphi^*)| \ge q > 1. \qquad (3)$$

Решение $y_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в разностное уравнение:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^{n-1}e^{im\varphi}}{2\tau} = a^2 \frac{\lambda^n e^{i(m-1)\varphi} - 2\lambda^n e^{im\varphi} + \lambda^n e^{i(m+1)\varphi}}{h^2}.$$

Сокращая на $\lambda^{n-1}e^{im\varphi}$, получим

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2\tau} = a^2 \frac{\lambda\left(e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi}\right)}{h^2}$$

или

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2\tau} = a^2 \frac{\lambda 2(\cos\varphi - 1)}{h^2}.$$

λ есть решение квадратного характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 8\frac{a^2\tau \sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{h^2}\lambda - 1 = 0.$$

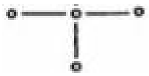
Исследовать спектр можно, не решая уравнения.
По теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Так как дискриминант $\left(8\dfrac{a^2\tau\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{h^2}\right)^2 + 4 \geq 0$, корни вещественны.

При $\sin\dfrac{\varphi}{2} \neq 0$ корни различны: если один меньше по модулю 1, то второй по модулю больше 1.

Схема АБСОЛЮТНО НЕУСТОЙЧИВА.

②

На шаблоне  построить разностную схему для уравнения теплопроводности $u_t - a^2 u_{xx} = 0$.
Исследовать на сходимость.
Как можно увеличить порядок аппроксимации?

$$u_{xx} = \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O\left(h^2\right).$$

$u_t = a \cdot y_{m-1}^{n+1} + b \cdot y_m^{n+1} + c \cdot y_{m+1}^{n+1} + d \cdot y_m^n$ - метод неопределенных коэффициентов.

Делаем разложение относительно y_m^n (центр шаблона + удобная точка):

$$y_m^{n+1} := u$$

$$y_{m\pm 1}^{n+1} = u \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O\left(h^4\right),$$

$$y_m^n = u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right).$$

$$
\begin{aligned}
u_t = {} & a \cdot \left(u - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O\left(h^4\right) \right) + \\
& + b \cdot u + \\
& + c \cdot \left(u + hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O\left(h^4\right) \right) + \\
& + d \cdot \left(u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right) \right)
\end{aligned}
$$

☹

Пусть $a = c = 0$:

$$u_t = b \cdot u +$$

$$+ d \cdot \left(u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right) \right)$$

$$\begin{cases} b + d = 0, \\ -\tau d = 1. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} d = -\dfrac{1}{\tau}, \\ b = \dfrac{1}{\tau}. \end{cases}$$

$$u_t = \frac{1}{\tau}\left(y_m^{n+1} - y_m^n\right) - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right) \right)$$

или

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right) = u_t + O(\tau)$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - a^2 \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{h^2} =$$

$$= u_t - a^2 u_{xx} + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O\left(\tau^3\right) + O\left(h^4\right) =$$

$$= u_t - a^2 u_{xx} + O\left(\tau, h^2\right)$$

Для исследования на устойчивость решение $y_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в разностное уравнение:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} = a^2 \frac{\lambda^{n+1}e^{i(m-1)\varphi} - 2\lambda^{n+1}e^{im\varphi} + \lambda^{n+1}e^{i(m+1)\varphi}}{h^2}.$$

Сокращая на $\lambda^n e^{im\varphi}$, получим

$$\frac{\lambda-1}{\tau} = a^2 \frac{\lambda\left(e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi}\right)}{h^2} \text{ или } \frac{\lambda-1}{\tau} = a^2 \frac{\lambda 2(\cos\varphi - 1)}{h^2}.$$

λ есть решение линейного характеристического уравнения

$$\lambda\left(1 + 4\frac{a^2\tau\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{h^2}\right) - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\dfrac{a^2 \tau \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}}{h^2}} \quad \rightarrow \quad |\lambda| = \left| \frac{1}{1 + 4\dfrac{a^2 \tau \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}}{h^2}} \right| \le 1$$ - схема абсолютно устойчива.

Как можно увеличить порядок аппроксимации?

Ошибка (погрешность) $u_t - a^2 u_{xx} = -\frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} + a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(\tau^3) + O(h^4)$

Главная часть $\frac{\tau}{2} u_{tt} - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx}$

$u_t = a^2 u_{xx}$

$u_{tt} = a^2 u_{xxt} = a^2 u_{txx} = a^2 (u_t)_{xx} = a^2 u_{txx} = a^2 (a^2 u_{xx})_{xx} = a^4 u_{xxxx}$

$\frac{\tau}{2} u_{tt} - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx} = \frac{\tau}{2} a^4 u_{xxxx} - a^2 \frac{h^2}{12} u_{xxxx} = a^2 \left(\frac{\tau}{2} a^2 - \frac{h^2}{12} \right) u_{xxxx} = 0$

при $\tau = \frac{h^2}{6a^2}$.

При этом погрешность $-\frac{\tau^2}{6}u_{ttt} + O(\tau^3) + O(h^4) = O(\tau^2,\ h^4)$