ЧМ решения ДУвЧП гиперболического типа

(на примере уравнения переноса)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$a = const$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, a > 0, \\ \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$ - задача Коши.

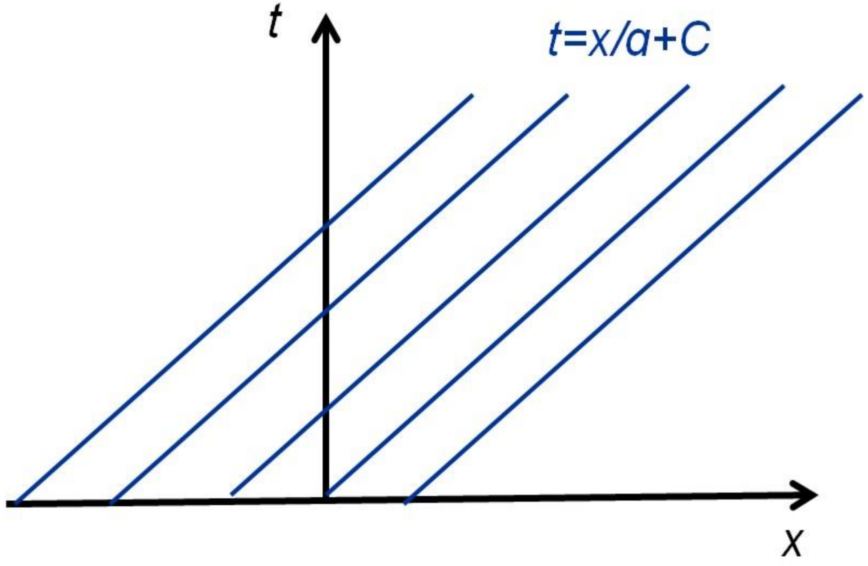
уравнение характеристик: $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{a}$

характеристики: $x - at = const$

первый интеграл: $f(x - at)$

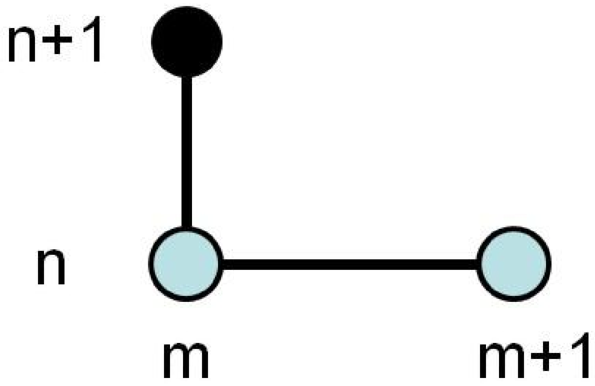
общее решение: $u(x,t) = f(x - at)$

решение ЗК: $u(x,t) = u_0(x - at)$



$\underline{u(x,t) = const}$ **вдоль характеристик**

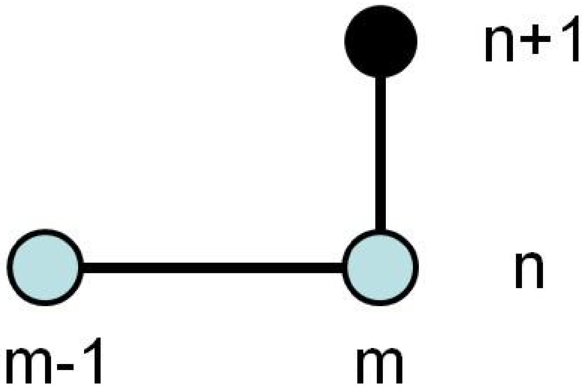
простейшие разностные схемы



"явный правый уголок" ("уголок вперед")

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h}=0 \qquad \text{(ПУ)}$$

$$O(\tau,h)$$



"явный левый уголок" ("уголок назад")

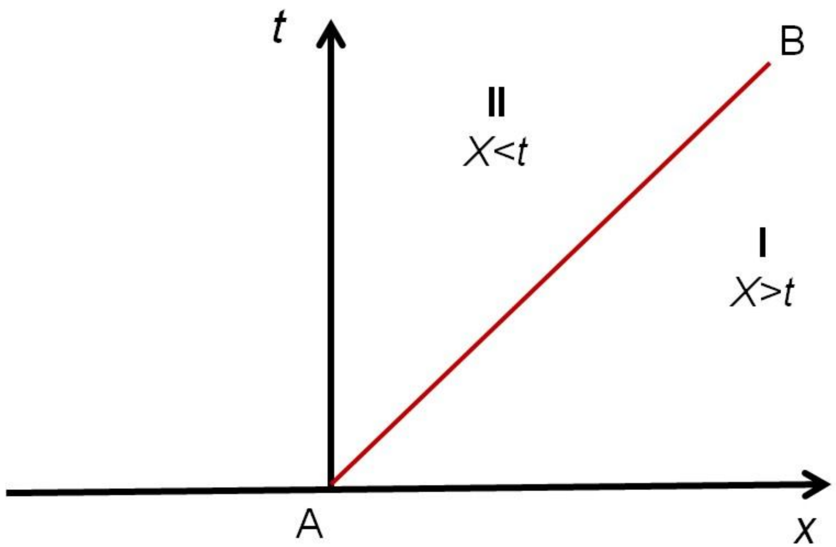
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}=0 \qquad \text{(ЛУ)}$$

$$O(\tau,h)$$

пример 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, a > 0, \\ u(0,x) = \begin{cases} u_0(x), x < 0, \\ 0, x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{ u(t,x) = \begin{cases} u_0(x-t), x < t, \\ 0, x \geq t. \end{cases} \right.$$



(ПУ) $\rightarrow$ $$u_m^{n+1} = u_m^n\left(1+\frac{\tau}{h}\right) - \frac{\tau}{h}u_{m+1}^n$$

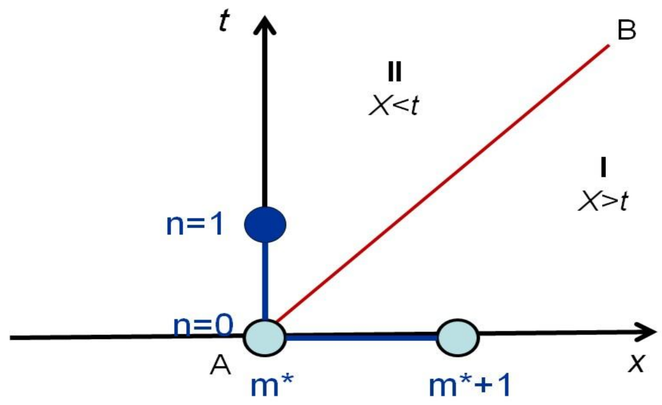
при $x \geq 0$ имеем для

$n = 0$ $\quad u_{m*}^0 = u_{m*+1}^0 = 0$

$n = 1$ $\quad u_{m*}^1 = u_{m*+1}^1 = 0$

$\vdots$

$\forall n > 1$ $\quad u_{m*}^n = u_{m*+1}^n = 0$



РС (ПУ) дает решение, отличающееся от точного независимо от выбора шагов сетки

⇨ **сходимости нет**

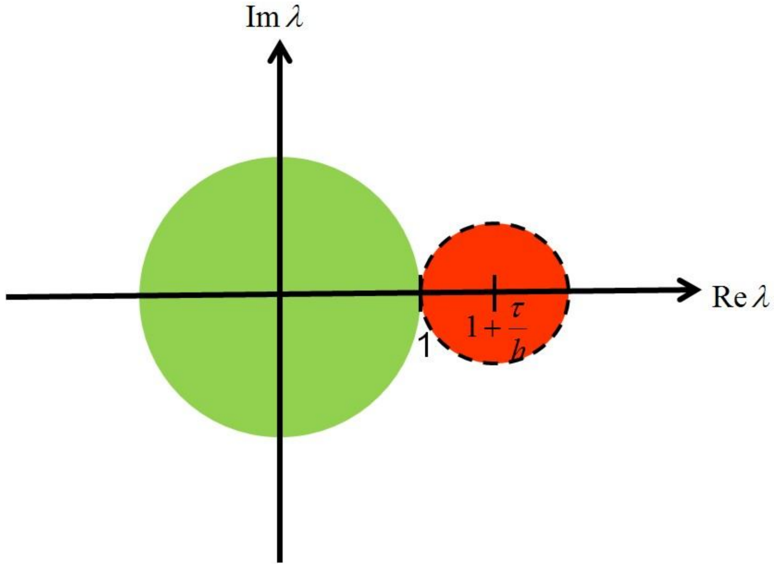
устойчивость

с точки зрения метода Фурье

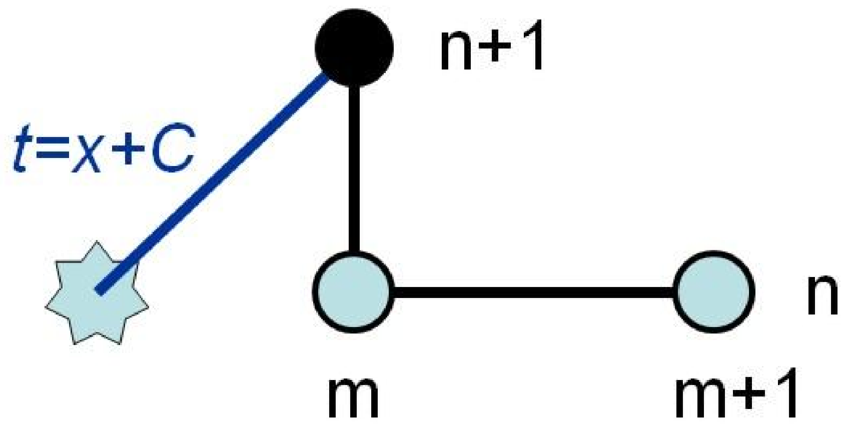
$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} = 0$$

$$\lambda = 1 + \frac{\tau}{h}\left(1 - e^{i\varphi}\right) = \left(1 + \frac{\tau}{h}\right) - \frac{\tau}{h}e^{i\varphi}$$



с точки зрения характеристик



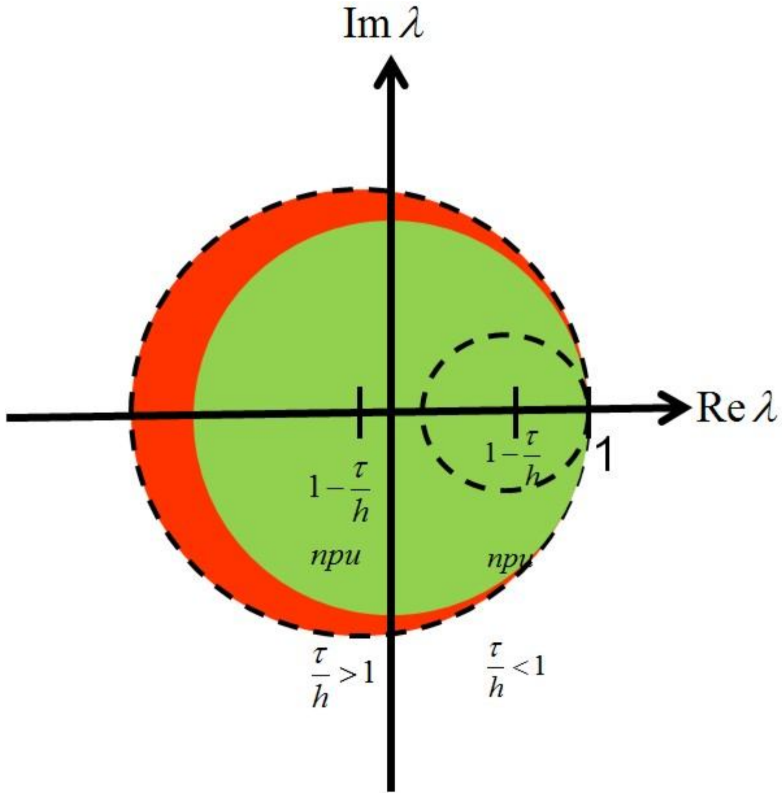
(ЛУ) $\rightarrow$ $$u_m^{n+1} = u_m^n\left(1 - \frac{\tau}{h}\right) + \frac{\tau}{h}u_{m-1}^n$$

спектральный признак

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

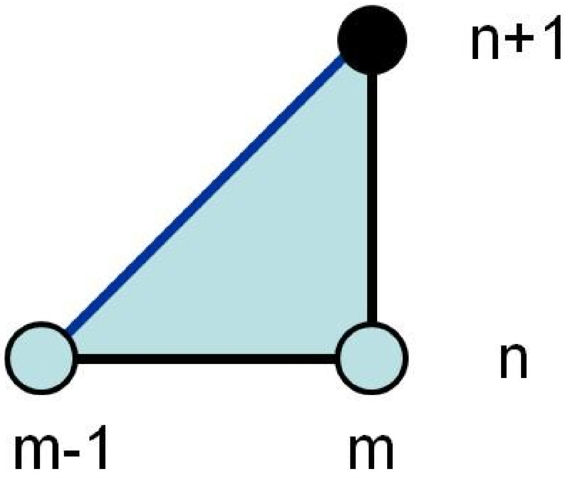
$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} = 0$$

$$\lambda = 1 + \frac{\tau}{h}\left(e^{-i\varphi} - 1\right) = \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) + \frac{\tau}{h}e^{-i\varphi}$$



условие устойчивости $\dfrac{\tau}{h} \le 1$

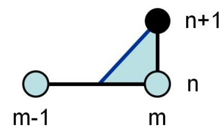
$$\boxed{\frac{\tau}{h} = 1}$$



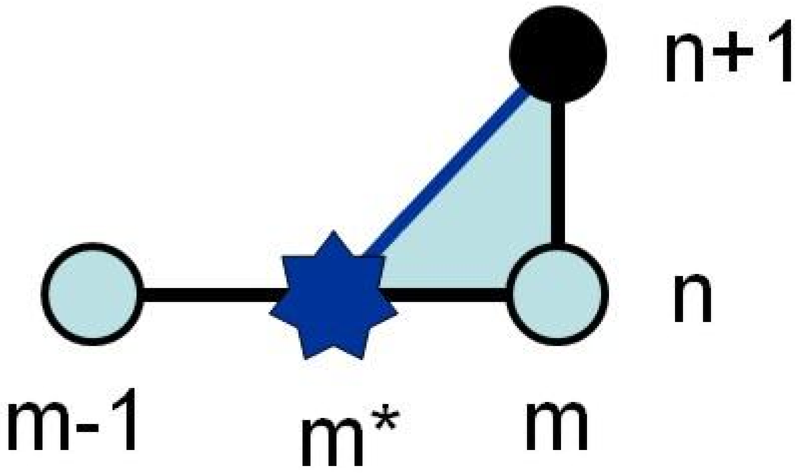
$u_m^{n+1} = u_{m-1}^n$ - **точное решение**

Это свойство конкретной задачи и РС:

при $a \neq 1 \ (например, \ \ a = 2)$ имеем $\dfrac{2\tau}{h} = 1$ и



$$\boxed{\frac{\tau}{h} < 1}$$



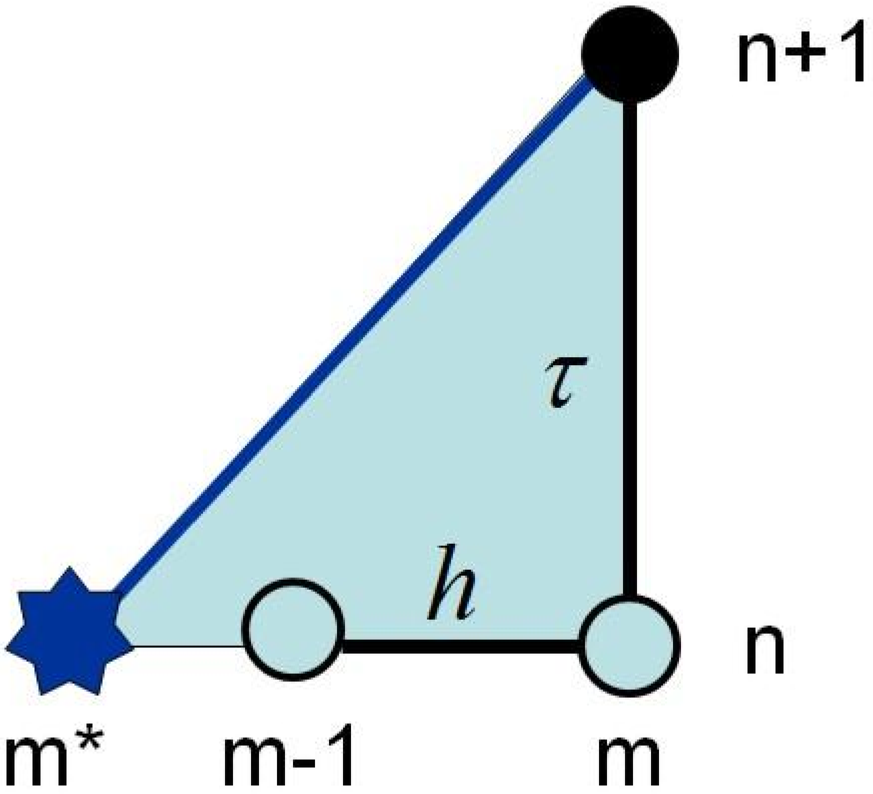
$$u_m^{n+1} = u_m^n \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) + \frac{\tau}{h} u_{m-1}^n = u_{m*}^n$$ -

линейная интерполяция между u_m^n и u_{m-1}^n.

Значение u_{m*}^n переносится по характеристике в u_m^{n+1}.

Решение близкое к точному (с точностью линейной интерполяции).

$$\boxed{\frac{\tau}{h} > 1}$$



$$u_m^{n+1} = u_m^n\left(1 - \frac{\tau}{h}\right) + \frac{\tau}{h} u_{m-1}^n = u_{m*}^n$$ -

линейная экстраполяция.

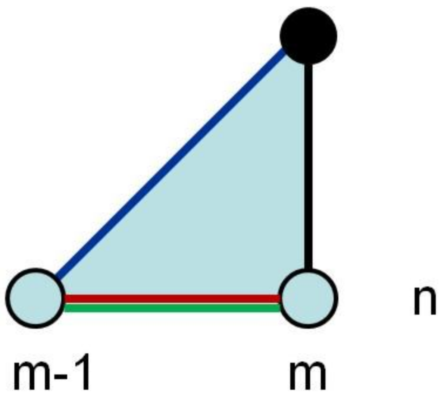
В общем случае можно получить решение сильно отличающееся от точного.

УСЛОВИЕ КФЛ

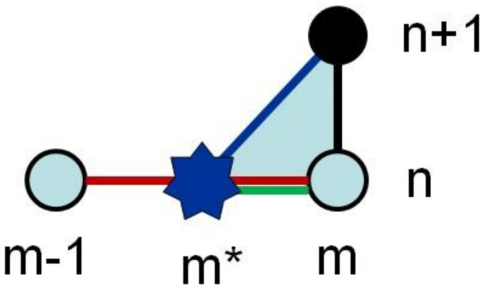
(Куранта-Фридрикса-Леви)

Пусть область влияния разностной схемы содержит в себе область влияния дифференциального уравнения.

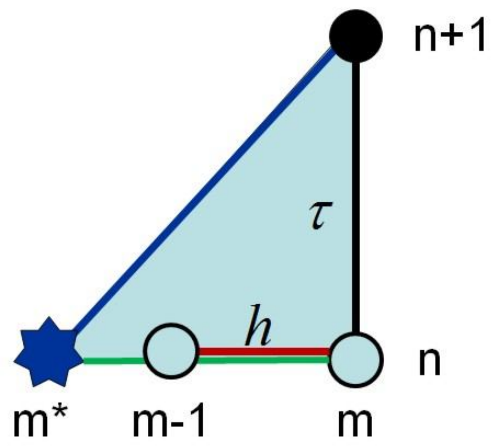
Разностная схема является неустойчивой, если это условие не выполнено.



устойчива



устойчива



неустойчива

$r = \dfrac{a\tau}{h}$ - число Куранта.

$u_m^{n+1} = u_m^n(1-r) + r u_{m-1}^n,\ r < 1$:

$$\left|u_m^{n+1}\right| = \left|u_m^n(1-r) + r u_{m-1}^n\right| \le (1-r)\left|u_m^n\right| + r\left|u_{m-1}^n\right| \le$$

$$\le \left[(1-r) + r\right]\max\left\{\left|u_m^n\right|, \left|u_{m-1}^n\right|\right\} \le \max_m \left|u_m^n\right|$$

Так как правая часть не зависит от m, можем написать

$\max\limits_m \left|u_m^{n+1}\right| \le \max\limits_m \left|u_m^n\right|$ - максимум $\left|u_m^n\right|$ не возрастает с ростом времени.

Применяя неравенство последовательно, получим

$$\max_m \left| u_m^{n+1} \right| \le \max_m \left| u_m^n \right| \le \ldots \le \max_m \left| u_m^0 \right|.$$

ПРИНЦИП МАКСИМУМА для разностной схемы:

максимальное значение модуля решения разностной задачи достигается на границе области.

Для ЗК максимальное значение достигается при $t = 0$: т.о., начальные возмущения затухают.

⇨ при выполнении условия КФЛ имеет место устойчивость по принципу максимума.