Уравнение Бюргерса (Хопфа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ - нестационарное слагаемое

$u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ - конвективное

$\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - вязкое

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Burgers, 1948

$\mu \neq 0$ - параболический тип

$\mu = 0$ - гиперболический тип

Андерсен, Таннехилл, Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М, Мир, 1990. Гл.4 §4.4
Годунов, Рябенький. РС. Гл. 9 §29
Калиткин. ЧМ. Гл. X §2
Федоренко. Введение в вычислительную физику. Ч.II §20

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ - нелинейное волновое уравнение.

Скорость распространения возмущений меняется $\rightarrow$

характеристики начинают пересекаться $\rightarrow$

возникают разрывы $\rightarrow$

обобщенные решения

I. Интегро-интерполяционные методы.

①

II. Искусственная вязкость.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, a > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$ - задача Коши.

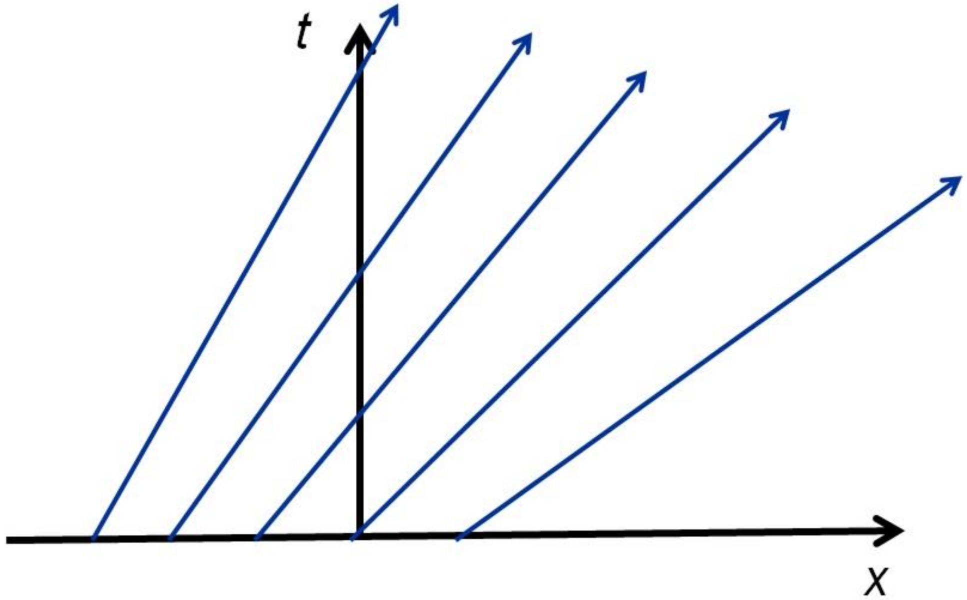
уравнение характеристик: $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{u}$

характеристики: $x - ut = const$ - прямые линии

$(x_0, 0)$ - точка, из которой выходит характеристика

$u(x,t) = u_0(x_0)$ - угловой коэффициент наклона

①

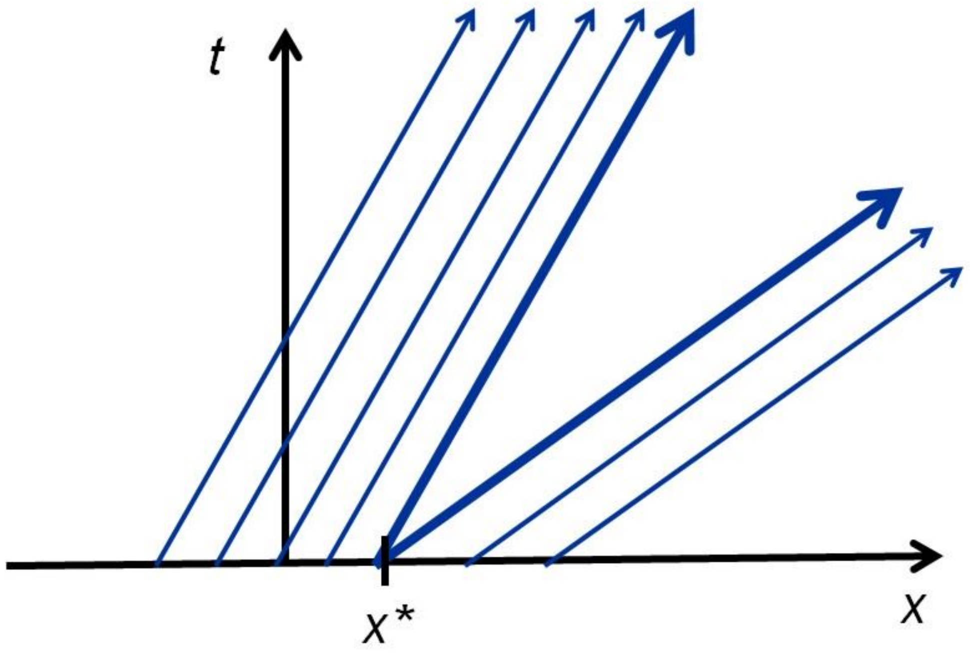


$u_0(x)\uparrow$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{u_0(x)}\downarrow$$

Решение однозначно и непрерывно

②



$$u_0(x) = \begin{cases} a, x < x^*, \\ b, x > x^*. \end{cases}$$

$$b > a$$

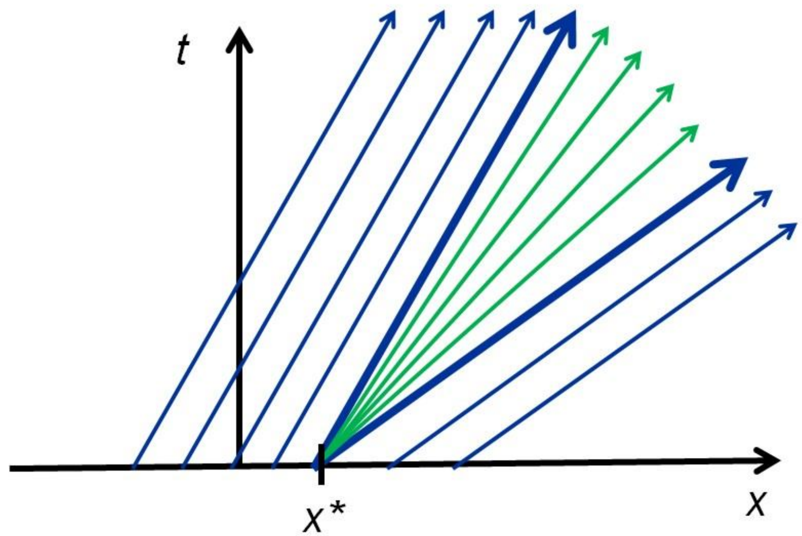
$$u(x,t) = \begin{cases} a, x - x^* \le at, \\ b, bt \le x - x^*. \end{cases}$$

При $at \le x - x^* \le t$ решение не определено.

Доопределенное решение

$$u(x,t)=\begin{cases} a, x-x^*\le at, \\ \dfrac{x-x^*}{t}, at\le x-x^*\le bt, \\ b, bt\le x-x^*. \end{cases}$$

непрерывно кроме точки $t=0$, $x=x^*$.

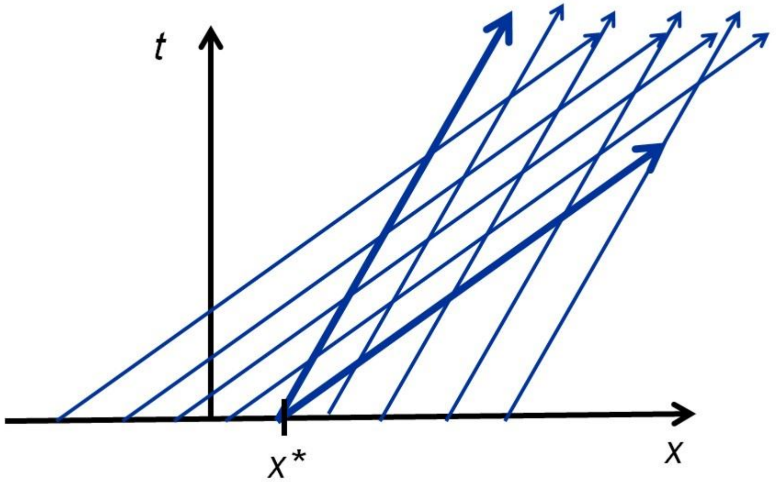


Такой разрыв начальных данных сглаживается со временем.

Но след разрыва остается: на выделенных жирным характеристиках производные решения разрывны.

Разрыв производных - ***слабый разрыв***.

③

	$u_0(x) = \begin{cases} a, x < x^*, \\ b, x > x^*. \end{cases}$ $a > b$ В угле, образованном выделенными жирным характеристиками, в каждую точку две характеристики приносят разные значения.

Вне угла решение определено однозначно,

внутри - неоднозначно.

Непрерывное решение построить не удается.

Решение - обобщенное.

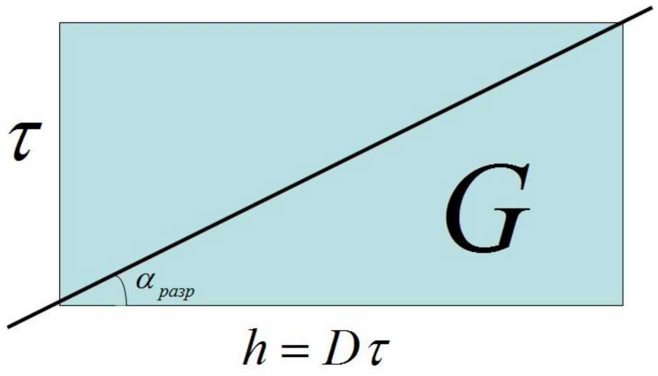
дивергентная форма уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x}=0$$

Замечания:

- обобщенное решение удовлетворяет некоторому интегральному уравнению, получающемуся из определенной дивергентной формы ДУ;
- разные дивергентные формы ДУ приводят к разным обобщенным решениям, хотя гладкие решения одинаковы для всех дивергентных форм;
- дивергентная форма, соответствующая физическому закону сохранения, определяет правильное (*допустимое*) решение.

ищем решение, имеющее единственный разрыв: $\operatorname{tg}\alpha_{разр} = \dfrac{1}{D}$



Формула Грина

$$\iint_G \left(P_x - Q_y\right) dxdy = \int_{\partial G} Qdx + Pdy$$

$$0 = \iint_G \left(\frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt = \int_{\partial G} -udx + \frac{u^2}{2}dt$$

Из поведения характеристик: $\begin{array}{ll} u(t,x) = a, & x - x^* < Dt, \\ u(t,x) = b, & x - x^* > Dt. \end{array}$

$$0 = \int_{\partial G} -udx + \frac{u^2}{2}dt = h(-b) + \tau\frac{b^2}{2} - h(-a) - \tau\frac{a^2}{2} = h(a-b) + \tau\frac{b^2 - a^2}{2} \rightarrow h = \tau\frac{b+a}{2} \rightarrow$$

$$D = \frac{h}{\tau} = \frac{b+a}{2}$$

разрыв решения - ***сильный разрыв***

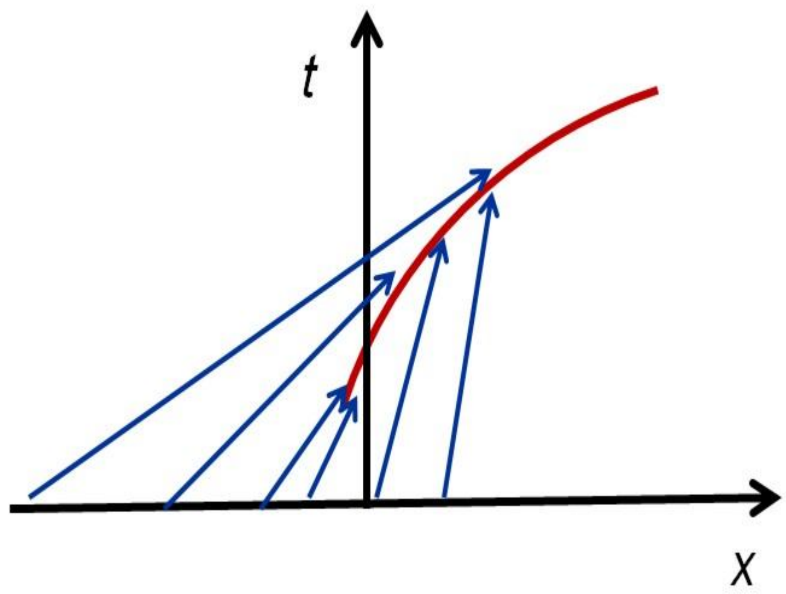
④

$u_0(x) \downarrow$

Пересечение характеристик приводит к образованию сильного разрыва,

но местная скорость разрыва уже не постоянна.

Число разрывов со временем может изменяться.



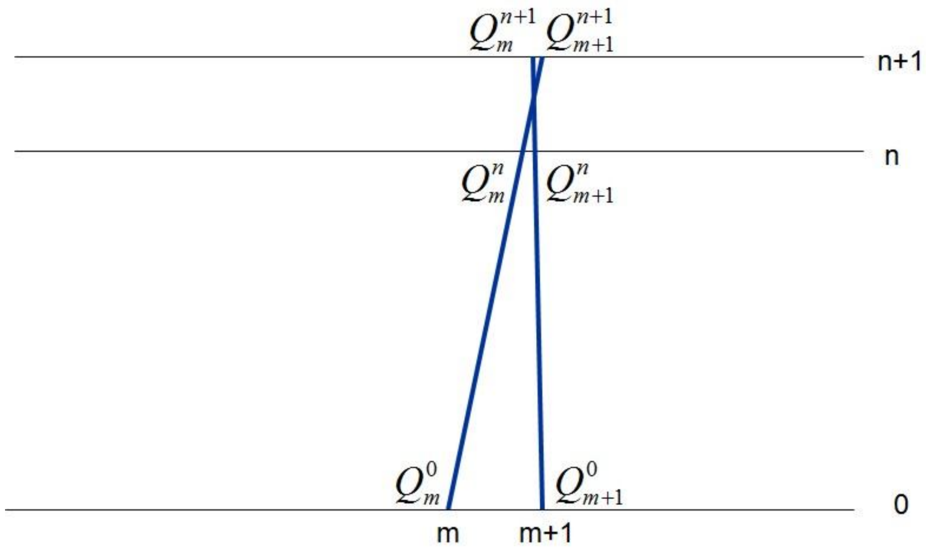
МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Из каждой точки $(x_m, 0)$ выпустим характеристику.

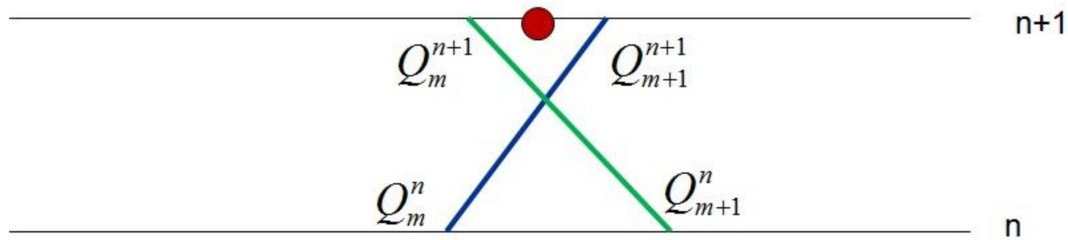
$u(x,0) = u_0(x)$ - гладкая.

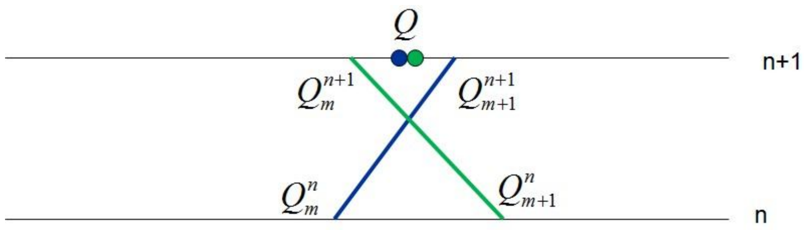
Полагаем, что τ можно выбрать так, что между временными слоями каждая характеристика пересекается не более, чем с одной.

Если на $0 \le t \le \tau$ характеристики не пересекаются, делаем следующий шаг. И т.д.

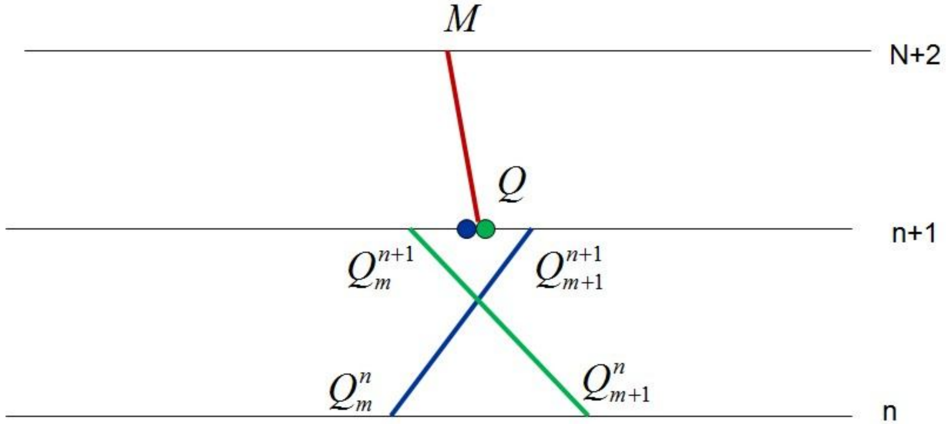


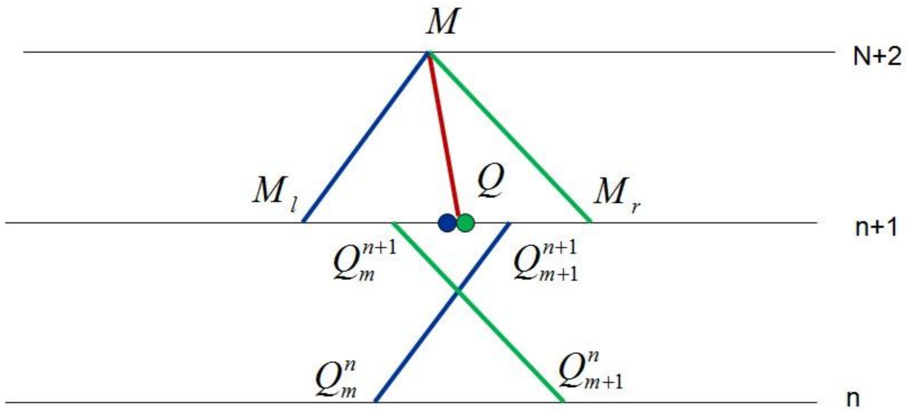
Середину отрезка $\left[Q_{m+1}^{n+1}, Q_{m}^{n+1}\right]$ считаем точкой, из которой выходит зарождающийся разрыв.





Точки Q_m^{n+1} и Q_{m+1}^{n+1} заменяем одной т. Q, приписывая ей два значения решения $u_l = u\left(Q_m^n\right)$ и $u_r = u\left(Q_{m+1}^n\right)$

Из т. Q выпускаем линию разрыва до пересечения с прямой $t=(n+2)\tau$. Угловой коэффициент определяем из условия на разрыве $ctg\alpha=\dfrac{u_l+u_r}{2}$	
Из точки M проводим характеристики назад, до пересечения с прямой $t=(n+1)\tau$ с коэффициентами наклона u_l и u_r с предыдущего слоя.	



В т.т. M_l и M_r значения значения u находим с помощью интерполяции и принимаем их за левре и правое значение решения в т. M .

Находим новый наклон разрыва.

И т.д.