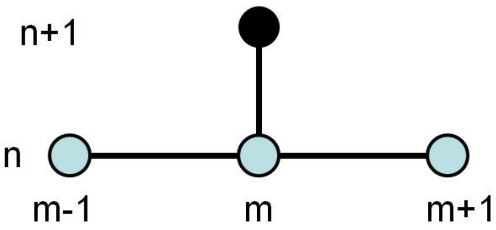
МЕТОД ЛАКСА

$$u(x,t+\tau)=u(x,t)+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\dots$$

u_t, u_{tt} и т.д. из ДУ.

Явная четырехточечния схема

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau u_t + O(\tau^2)$$

из ДУ $u_t = -a\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$u_m^{n+1} = u_m^n - a\tau \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + O(\tau^2)$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}=0$$

аппроксимация

Делаем разложение относительно u_m^n:

$$u_m^n := u$$

$$u_{m\pm1}^n = u \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} + O\left(h^5\right),$$

$$u_m^{n+1} = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt} + \frac{\tau^4}{24}u_{tttt} + O\left(\tau^5\right),$$

$$\frac{u+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+O(\tau^3)-u}{\tau}+$$

$$+a\cdot\frac{\left(u+hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+\frac{h^3}{6}u_{xxx}+O(h^3)\right)-\left(u-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}-\frac{h^3}{6}u_{xxx}+O(h^3)\right)}{2h}+O(\tau)=0$$

$$u_t+\frac{\tau}{2}u_{tt}+O(\tau^2)+a\cdot\frac{2hu_x+2\frac{h^3}{6}u_{xxx}+O(h^3)}{2h}+O(\tau)=0$$

$$u_t+au_x=-\frac{\tau}{2}u_{tt}+\frac{h^2}{6}u_{xxx}+O(h^2)+O(\tau)=O(\tau,h^2)$$

устойчивость

Согласно ***спектральному признаку*** решение $u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в разностное уравнение

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} + a \cdot \frac{\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} - \lambda^n e^{i(m-1)\varphi}}{2h} = 0$$

Сокращая на $\lambda^n e^{im\varphi}$, получим

$$\lambda = 1 - a\tau \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h}$$

или

$$\lambda = 1 - i\frac{a\tau}{h}\sin\varphi$$

$$r = \frac{a\tau}{h}$$

$$|\lambda| = 1 + r^2 \sin^2\varphi > 1$$

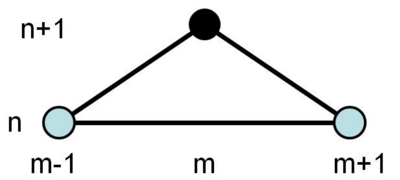
неустойчива.

Можно рассмотреть устойчивость по Нейману: $|\lambda| = 1 + r^2 \sin^2\varphi < 1 + C\tau$.

Схема Лакса

(явная центральная трехточечная схема)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau u_t + O(\tau^2)$$

из ДУ $u_t = -a\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$u_m^{n+1} = \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2} - a\tau \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + O(\tau^2)$$

аппроксимация

Делаем разложение относительно u_m^n:

$$u_m^n := u$$

$$u_{m\pm1}^n = u \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + O\left(h^5\right),$$

$$u_m^{n+1} = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + \frac{\tau^4}{24} u_{tttt} + O\left(\tau^5\right),$$

$$u+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+O\left(\tau^3\right)=\frac{\left(u+hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+O\left(h^3\right)\right)+\left(u-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+O\left(h^3\right)\right)}{2}-$$

$$-a\tau\cdot\frac{\left(u+hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+O\left(h^3\right)\right)-\left(u-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+O\left(h^3\right)\right)}{2h}+O\left(\tau^2\right)$$

$$u+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+O\left(\tau^3\right)=u+\frac{h^2}{2}u_{xx}+O\left(h^3\right)-a\tau\cdot\frac{2hu_x+O\left(h^3\right)}{2h}+O\left(\tau^2\right)$$

$$u_t+au_x=-\frac{\tau}{2}u_{tt}+\frac{h^2}{2\tau}u_{xx}+O\left(\frac{h^3}{\tau}\right)+O\left(h^2\right)+O(\tau)=O\left(\tau,h^2,\frac{h^2}{\tau}\right)$$

устойчивость

Согласно ***спектральному признаку*** решение $u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в разностное уравнение

$$\lambda^{n+1} e^{im\varphi} = \frac{\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} + \lambda^n e^{i(m-1)\varphi}}{2} - a\tau \cdot \frac{\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} - \lambda^n e^{i(m-1)\varphi}}{2h}$$

Сокращая на $\lambda^n e^{im\varphi}$, получим

$$\lambda = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} - a\tau \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h}$$

или

$$\lambda = \cos\varphi - i\frac{a\tau}{h}\sin\varphi$$

$$r = \frac{a\tau}{h}$$

$$|\lambda| = \cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi$$

устойчив при $r < 1$

☹ - диссипативные свойства

☺ - монотонность (отсутствие осцилляций)

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

[Lax, 1954]

Схема Лакса-Вендроффа

$$u(x,t+\tau) = u(x,t) + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3)$$

из ДУ $u_t = -a\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$u_{tt} = -au_{xt} = -au_{tx} = -a(u_t)_x = -a(-au_x)_x = a^2 u_{xx}$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n - a\tau \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + a^2 \frac{\tau^2}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{h^2} + O\left(\tau^3\right)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = a^2 \frac{\tau}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

[Lax, Wendroff, 1960]

аппроксимация

$$O\left(\tau^2, h^2\right)$$

$$u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} + \frac{\tau^3}{24} u_{tttt} + O\left(\tau^5\right) +$$

$$+ a \cdot \frac{\left(u + hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + O\left(h^3\right)\right) - \left(u - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + O\left(h^3\right)\right)}{2h} =$$

$$= a^2 \frac{\tau}{2} \frac{\left(u + hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O\left(h^4\right)\right) - 2u + \left(u - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O\left(h^4\right)\right)}{h^2} + O\left(\tau^2\right)$$

$$u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O\left(\tau^2\right) + a \cdot \frac{2\left(hu_x + O\left(h^3\right)\right)}{2h} = a^2 \frac{\tau}{2} \frac{2\left(\frac{h^2}{2} u_{xx} + O\left(h^4\right)\right)}{h^2} + O\left(\tau^2\right)$$

$$u_t + au_x + \frac{\tau}{2}u_{tt} + O(\tau^2) + O(h^2) = a^2\frac{\tau}{2}u_{xx} + O(h^2) + O(\tau^2)$$

$$u_t + au_x + \frac{\tau}{2}\left(u_{tt} - a^2 u_{xx}\right) + O(\tau^2) + O(h^2) = 0$$

так как

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

то

$$u_t + au_x = O(\tau^2, h^2)$$

устойчивость

Согласно ***спектральному признаку***

$$\frac{\lambda-1}{\tau}+ia\cdot\frac{\sin\varphi}{h}=a^2\frac{\tau}{2}\frac{2\cos\varphi-2}{h^2}$$

или

$$\lambda=1+a^2\frac{\tau^2}{h^2}(\cos\varphi-1)-i\frac{a\tau}{h}\sin\varphi$$

число Куранта $r=\frac{a\tau}{h}$

$$\lambda=1+r^2(\cos\varphi-1)-ir\sin\varphi$$

$$|\lambda|^2=\left(1+r^2(\cos\varphi-1)\right)^2+r^2\sin^2\varphi$$

$$|\lambda|^2 = 1 + 2r^2(\cos\varphi - 1) + r^4(\cos\varphi - 1)^2 + r^2\sin^2\varphi$$

$$|\lambda|^2 = 1 + 2r^2(\cos\varphi - 1) + r^4\left(\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1\right) + r^2\left(1 - \cos^2\varphi\right)$$

$$|\lambda|^2 = \cos^2\varphi\left(r^4 - r^2\right) - 2\cos\varphi\left(r^4 - r^2\right) + \left(1 + r^4 - r^2\right)$$

$$|\lambda|^2 = 1 + r^2(1 - \cos\varphi)^2\left(r^2 - 1\right)$$

$|\lambda|^2 < 1$ при $1 + 4r^2\left(r^2 - 1\right) < 1 \rightarrow$

$$r^2 - 1 < 0 \rightarrow$$

$$r^2 < 1 \rightarrow$$

$$|r| < 1$$

Осцилляции решения вблизи разрывов подчеркивают преимущественно дисперсионные свойства схемы.