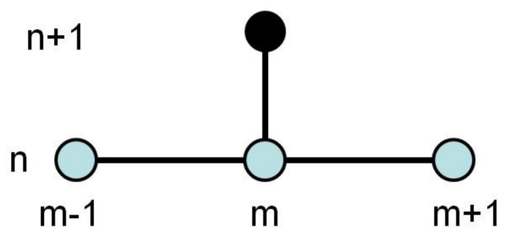
# УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Построить РС

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, & u(0,x) = u_0(x), \\ v_t + u_x = 0, & v(0,x) = v_0(x). \end{cases}$$

# Явная четырехточечния схема

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \dfrac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0, \\[2ex]
\dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \dfrac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0.
\end{cases}
$$



## аппроксимация

Делаем разложение относительно $a_m^n$ $\left( a = \begin{cases} u, \\ v \end{cases} \right)$:

$$a_m^n := a$$

$$a_{m\pm1}^n = a \pm h a_x + \frac{h^2}{2} a_{xx} \pm \frac{h^3}{6} a_{xxx} + \frac{h^4}{24} a_{xxxx} + O\left(h^5\right),$$

$$a_m^{n+1} = a + \tau a_t + \frac{\tau^2}{2} a_{tt} + \frac{\tau^3}{6} a_{ttt} + \frac{\tau^4}{24} a_{tttt} + O\left(\tau^5\right),$$

$$\frac{a_m^{n+1} - a_m^n}{\tau} = O(\tau)$$

$$\frac{a_{m+1}^n - a_{m-1}^n}{2h} = O\left(h^2\right)$$

$$\boxed{\text{аппроксимация } O\left(\tau, h^2\right)}$$

## устойчивость

Согласно ***спектральному признаку*** решение $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_m^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в РС

$$\begin{cases} c_1 \dfrac{\lambda - 1}{\tau} + c_2 \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} = 0, \\ c_2 \dfrac{\lambda - 1}{\tau} + c_1 \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1 (\lambda - 1) + i c_2 \dfrac{\tau}{h} \sin\varphi = 0, \\ c_2 (\lambda - 1) + i c_1 \dfrac{\tau}{h} \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & i \dfrac{\tau}{h} \sin\varphi \\ i \dfrac{\tau}{h} \sin\varphi & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2\varphi$$

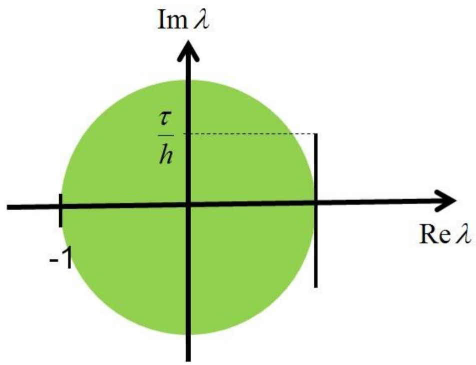
$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i\frac{\tau}{h}\sin\varphi$$

$$r = \frac{\tau}{h}$$

$$|\lambda| = 1 + r^2 \sin^2\varphi > 1$$

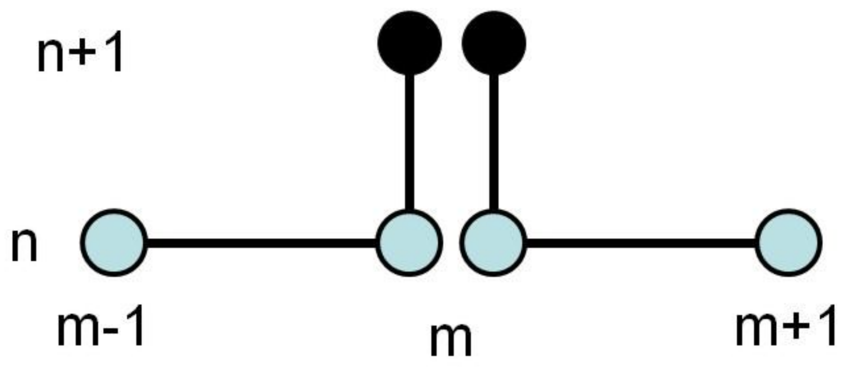
неустойчива.

☺ Можно рассматривать **устойчивость по Нейману**: $|\lambda| = 1 + r^2 \sin^2\varphi < 1 + C\tau$ при $\frac{\tau}{h^2} = const$.



# Явный левый/правый уголок

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \dfrac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0, \\ \\ \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \dfrac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0. \end{cases}$$



## аппроксимация

Делаем разложение относительно $a_m^n$ $\left( a = \begin{cases} u, \\ v \end{cases} \right)$:

$a_m^n := a$

$$a_{m\pm1}^n = a \pm h a_x + \frac{h^2}{2} a_{xx} \pm \frac{h^3}{6} a_{xxx} + \frac{h^4}{24} a_{xxxx} + O\left(h^5\right),$$

$$a_m^{n+1} = a + \tau a_t + \frac{\tau^2}{2} a_{tt} + \frac{\tau^3}{6} a_{ttt} + \frac{\tau^4}{24} a_{tttt} + O\left(\tau^5\right),$$

$$\frac{a_m^{n+1} - a_m^n}{\tau} = O(\tau)$$

$$\frac{a_{m+1}^n - a_m^n}{h} = O(h), \quad \frac{a_m^n - a_{m-1}^n}{h} = O(h)$$

$\boxed{\text{аппроксимация } O(\tau, h)}$

## устойчивость

Согласно ***спектральному признаку*** решение $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_m^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в РС

$$\begin{cases} c_1 \dfrac{\lambda - 1}{\tau} + c_2 \dfrac{1 - e^{-i\varphi}}{h} = 0, \\ c_2 \dfrac{\lambda - 1}{\tau} + c_1 \dfrac{e^{i\varphi} - 1}{h} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_1 (\lambda - 1) + c_2 \dfrac{\tau}{h} \left(1 - e^{-i\varphi}\right) = 0, \\ c_1 \dfrac{\tau}{h} \left(e^{i\varphi} - 1\right) + c_2 (\lambda - 1) = 0. \end{cases}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо

$$0=\begin{vmatrix} \lambda-1 & \frac{\tau}{h}\left(1-e^{-i\varphi}\right) \\ \frac{\tau}{h}\left(e^{i\varphi}-1\right) & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2-\frac{\tau^2}{h^2}\left(1-e^{-i\varphi}\right)\left(e^{i\varphi}-1\right) = (\lambda-1)^2+\frac{\tau^2}{h^2}\left(e^{i\varphi}-1-1+e^{-i\varphi}\right)=$$

$$=(\lambda-1)^2-\frac{\tau^2}{h^2}2(\cos\varphi-1)=(\lambda-1)^2+4\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$\lambda=1\pm i2\frac{\tau}{h}\sin\frac{\varphi}{2}$$

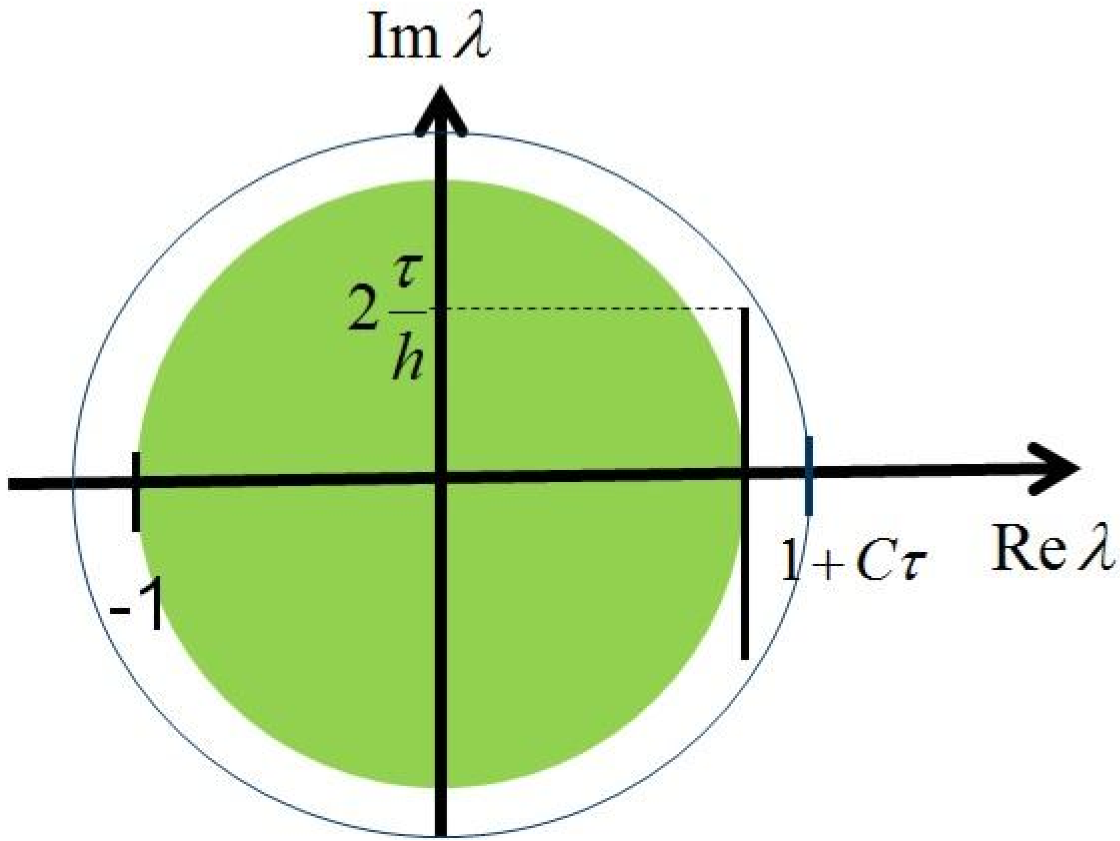
$$r=\frac{\tau}{h}$$

$$|\lambda|=1+4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}>1$$

неустойчива.

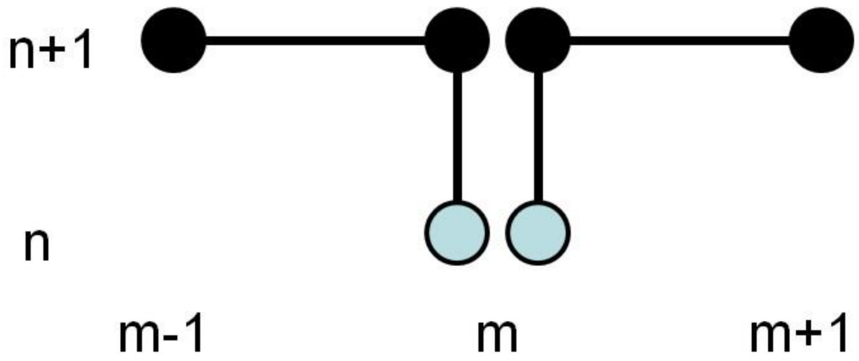
☺ Можно рассматривать **устойчивость по Нейману**: $|\lambda| = 1 + r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} < 1 + C\tau$

при $\frac{\tau}{h^2} = const$.



# Неявный левый/правый уголок

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \dfrac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0, \\ \\ \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \dfrac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = 0. \end{cases}$$



# аппроксимация

Делаем разложение относительно $a_m^n \left( a = \begin{cases} u, \\ v \end{cases} \right)$:

$$a_m^{n+1} := a$$

$$a_{m\pm1}^{n+1} = a \pm h a_x + \frac{h^2}{2} a_{xx} \pm \frac{h^3}{6} a_{xxx} + \frac{h^4}{24} a_{xxxx} + O\left(h^5\right),$$

$$a_m^n = a - \tau a_t + \frac{\tau^2}{2} a_{tt} - \frac{\tau^3}{6} a_{ttt} + \frac{\tau^4}{24} a_{tttt} + O\left(\tau^5\right),$$

$$\frac{a_m^{n+1} - a_m^n}{\tau} = O(\tau)$$

$$\frac{a_{m+1}^n - a_m^n}{h} = O(h),\ \frac{a_m^n - a_{m-1}^n}{h} = O(h)$$

$\boxed{\text{аппроксимация } O(\tau, h)}$

## устойчивость

Согласно ***спектральному признаку*** решение $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_m^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в РС

$$\begin{cases} c_1 \dfrac{\lambda - 1}{\tau} + c_2 \lambda \dfrac{1 - e^{-i\varphi}}{2h} = 0, \\ c_2 \dfrac{\lambda - 1}{\tau} + c_1 \lambda \dfrac{e^{i\varphi} - 1}{2h} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_1 (\lambda - 1) + c_2 \dfrac{\tau}{h} \lambda \left(1 - e^{-i\varphi}\right) = 0, \\ c_1 \dfrac{\tau}{h} \lambda \left(e^{i\varphi} - 1\right) + c_2 (\lambda - 1) = 0. \end{cases}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-1 & \frac{\tau}{h}\lambda\left(1-e^{-i\varphi}\right)\\ \frac{\tau}{h}\lambda\left(e^{i\varphi}-1\right) & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-\frac{\tau^2}{h^2}\lambda^2\left(1-e^{-i\varphi}\right)\left(e^{i\varphi}-1\right)=$$

$$=(\lambda-1)^2-\frac{\tau^2}{h^2}\lambda^2\left(e^{i\varphi}-1-1+e^{-i\varphi}\right)=(\lambda-1)^2-\frac{\tau^2}{h^2}\lambda^2\,2(\cos\varphi-1)=$$

$$=(\lambda-1)^2+4\lambda^2\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$(\lambda-1)^2=-4\lambda^2\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\rightarrow$$

$$\lambda=1\pm i2\lambda\frac{\tau}{h}\sin\frac{\varphi}{2}\rightarrow$$

$$\lambda\left(1\mp i2\lambda\frac{\tau}{h}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=1$$

$$r = \frac{\tau}{h}$$

$$|\lambda| = \frac{1}{1 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leq 1$$

абсолютно устойчива.