УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ 2

Построить РС

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, & u(0,x) = u_0(x), \\ v_t + u_x = 0, & v(0,x) = v_0(x). \end{cases}$$

Сеточно-характеристический метод

В общем случае гиперболическая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}u_t + a_{12}v_t + b_{11}u_x + b_{12}v_x = f_1, \\ \\ a_{21}u_t + a_{22}v_t + b_{21}u_x + b_{22}v_x = f_1. \end{cases} \qquad (1)$$

Или

$$A\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Для нашей системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть γ гладкая кривая в плоскости $x,\ t$.

?

Можно ли по значениям $u(x,t)$ и $v(x,t)$ на γ, используя (1), найти на ней u_t, v_t, u_x, v_x?

☺
$$\begin{cases} du = u_t dt + u_x dx, \\ dv = v_t dt + v_x dx. \end{cases} \tag{2}$$

$\begin{cases}(1),\\(2).\end{cases}$ - 4 уравнения, 4 неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}u_t + a_{12}v_t + b_{11}u_x + b_{12}v_x = f_1, \\ a_{21}u_t + a_{22}v_t + b_{21}u_x + b_{22}v_x = f_1, \\ du = u_t dt + u_x dx, \\ dv = v_t dt + v_x dx. \end{cases}$$

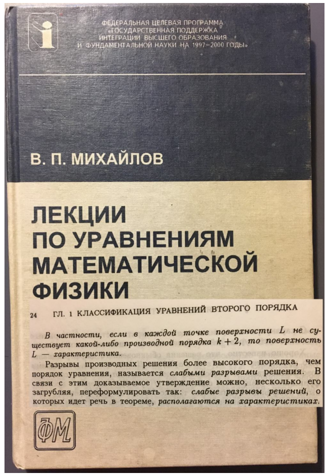
☺ метод подстановки: (2) →

$$\begin{cases} u_t = -u_x \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{du}{dt}, \\ v_t = -v_x \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dv}{dt}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -a_{11}u_x \dfrac{dx}{dt} + a_{11}\dfrac{du}{dt} - a_{12}v_x \dfrac{dx}{dt} + a_{12}\dfrac{dv}{dt} + b_{11}u_x + b_{12}v_x = f_1, \\ \\ -a_{21}u_x \dfrac{dx}{dt} + a_{21}\dfrac{du}{dt} - a_{22}v_x \dfrac{dx}{dt} + a_{22}\dfrac{dv}{dt} + b_{21}u_x + b_{22}v_x = f_1. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \left(-a_{11}\dfrac{dx}{dt}+b_{11}\right)u_x+\left(-a_{12}\dfrac{dx}{dt}+b_{12}\right)v_x=f_1-a_{11}\dfrac{du}{dt}-a_{12}\dfrac{dv}{dt}=F_1, \\ \left(-a_{21}\dfrac{dx}{dt}+b_{21}\right)u_x+\left(-a_{22}\dfrac{dx}{dt}+b_{22}\right)v_x=f_2-a_{21}\dfrac{du}{dt}-a_{22}\dfrac{dv}{dt}=F_2. \end{cases}$$



На характеристике решение $\left[\begin{array}{l}\neg\exists \\ \\ \neg !\end{array}\right.$

Уравнение характеристик

$$\begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\dfrac{dx}{dt} & b_{12} - a_{12}\dfrac{dx}{dt} \\ b_{21} - a_{21}\dfrac{dx}{dt} & b_{22} - a_{22}\dfrac{dx}{dt} \end{vmatrix} = 0$$

Для рассматриваемой системы

$$\det\left(B - \frac{dx}{dt}A\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{dx}{dt}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{dx}{dt} & 1 \\ 1 & -\dfrac{dx}{dt} \end{vmatrix} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1$$

характеристики $x = \pm t + const$

Для разрешимости системы[1]

$$Rg\begin{pmatrix} b_{11}-a_{11}\frac{dx}{dt} & b_{12}-a_{12}\frac{dx}{dt} & F_1 \\ b_{21}-a_{21}\frac{dx}{dt} & b_{22}-a_{22}\frac{dx}{dt} & F_2 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} b_{11}-a_{11}\frac{dx}{dt} & b_{12}-a_{12}\frac{dx}{dt} \\ b_{21}-a_{21}\frac{dx}{dt} & b_{22}-a_{22}\frac{dx}{dt} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

[1] теорема Кронеккера-Капелли

УСЛОВИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

$$\begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\dfrac{dx}{dt} & f_1 - a_{11}\dfrac{du}{dt} - a_{12}\dfrac{dv}{dt} \\ b_{21} - a_{21}\dfrac{dx}{dt} & f_2 - a_{21}\dfrac{du}{dt} - a_{22}\dfrac{dv}{dt} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} b_{12} - a_{12}\dfrac{dx}{dt} & f_1 - a_{11}\dfrac{du}{dt} - a_{12}\dfrac{dv}{dt} \\ b_{22} - a_{22}\dfrac{dx}{dt} & f_2 - a_{21}\dfrac{du}{dt} - a_{22}\dfrac{dv}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Для рассматриваемой задачи

$$0 = \begin{vmatrix} -\dfrac{dx}{dt} & -\dfrac{du}{dt} \\ 1 & -\dfrac{dv}{dt} \end{vmatrix} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dt}$$ - условия на характеристиках.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 1} \quad \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\underline{du + dv = 0} \rightarrow$$

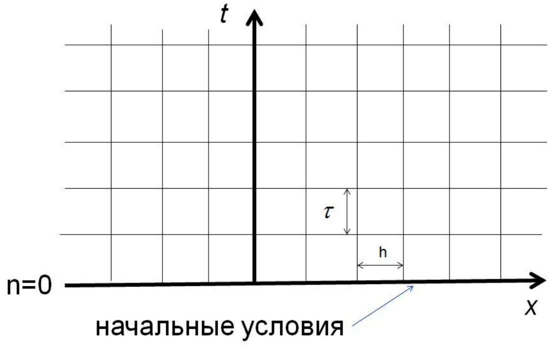
$$d(u+v) = 0 \rightarrow R_1 = u + v$$ инвариант Римана

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -1} \quad \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\underline{du - dv = 0} \rightarrow$$

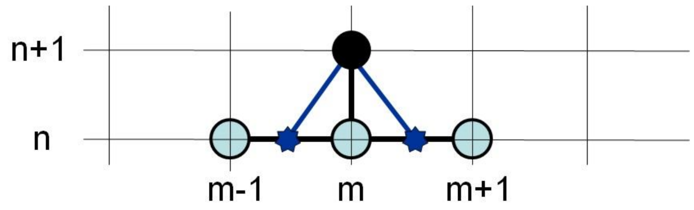
$$d(u-v) = 0 \rightarrow R_2 = u - v$$ инвариант Римана

Схема сеточно-характеристического метода

❶ 

Сетка (регулярная)

❷ Из узлов верхнего временного слоя выпускаем вниз до пересечения с нижним временным слем характеристики (не забывая про условие КФЛ)

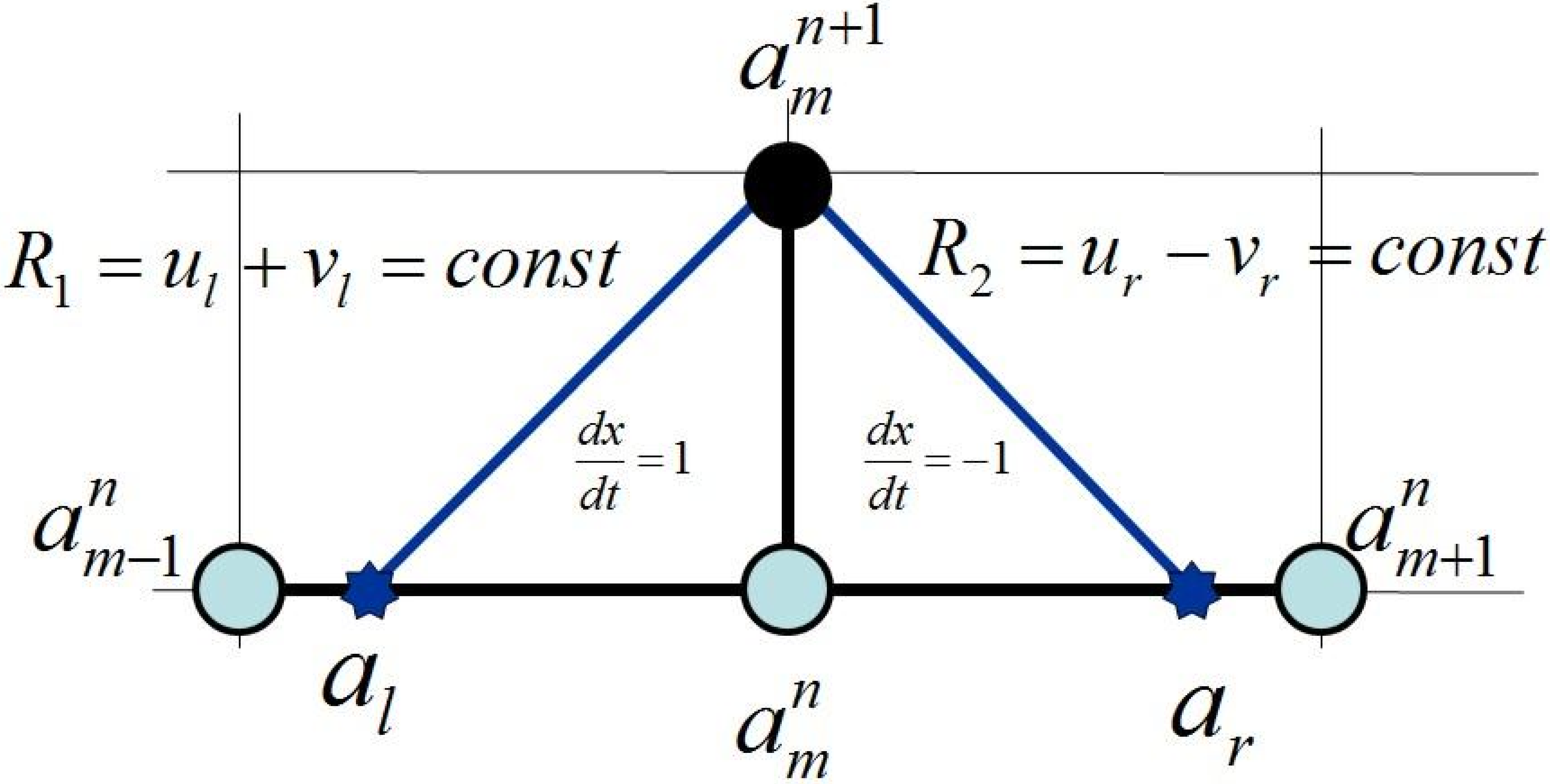


❸ Значения в точках ✸ находим с помощью интерполяции (линейной, квадратичной, ...).

❹ Используя соотношения на характеристиках, находим решения в узлах верхнего временного слоя.

И т.д.

Для рассматриваемой задачи



формула линейной интерполяции по 2-м точкам

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$$

	0	1
$f(x)$	f_0	f_1
x	x_0	x_1

	0	1
$f(x) = a_l$	a_m^n	a_{m-1}^n
$x = -\tau$	0	$-h$

левая точка a_l

$$a_l = \frac{-\tau + h}{0 + h} a_m^n + \frac{-\tau - 0}{-h - 0} a_{m-1}^n$$

	0	1
$f(x) = a_r$	a_m^n	a_{m+1}^n
$x = \tau$	0	h

правая точка a_r

$$a_r = \frac{\tau - h}{0 - h} a_m^n + \frac{\tau - 0}{h - 0} a_{m+1}^n$$

Имеем в точках ✸:

$$u_l = \frac{h-\tau}{h} u_m^n + \frac{\tau}{h} u_{m-1}^n \qquad\qquad u_r = \frac{h-\tau}{h} u_m^n + \frac{\tau}{h} u_{m+1}^n$$

$$v_l = \frac{h-\tau}{h} v_m^n + \frac{\tau}{h} v_{m-1}^n \qquad\qquad v_r = \frac{h-\tau}{h} v_m^n + \frac{\tau}{h} v_{m+1}^n$$

u_m^{n+1} и v_m^{n+1} найдем, используя соотношения на характеристиках

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=1} \qquad \underline{du+dv=0}$$

$$du=u_m^{n+1}-u_l,\ dv=v_m^{n+1}-v_l$$

$$u_m^{n+1}-u_l+v_m^{n+1}-v_l=0$$

$$u_m^{n+1}-\left(\left(1-\frac{\tau}{h}\right)u_m^n+\frac{\tau}{h}u_{m-1}^n\right)+v_m^{n+1}-\left(\left(1-\frac{\tau}{h}\right)v_m^n+\frac{\tau}{h}v_{m-1}^n\right)=0$$

$$u_m^{n+1}-u_m^n+\frac{\tau}{h}\left(u_m^n-u_{m-1}^n\right)+v_m^{n+1}-v_m^n+\frac{\tau}{h}\left(v_m^n-v_{m-1}^n\right)=0$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}+\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}+\frac{v_m^n-v_{m-1}^n}{h}=0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -1} \qquad \underline{du - dv = 0}$$

$$du = u_m^{n+1} - u_r,\ dv = v_m^{n+1} - v_l$$

$$u_m^{n+1} - u_r - \left(v_m^{n+1} - v_r\right) = 0$$

$$u_m^{n+1} - \left(\left(1 - \frac{\tau}{h}\right)u_m^n + \frac{\tau}{h}u_{m+1}^n\right) - v_m^{n+1} + \left(\left(1 - \frac{\tau}{h}\right)v_m^n + \frac{\tau}{h}v_{m+1}^n\right) = 0$$

$$u_m^{n+1} - u_m^n + \frac{\tau}{h}\left(u_m^n - u_{m+1}^n\right) - v_m^{n+1} + v_m^n - \frac{\tau}{h}\left(v_m^n - v_{m+1}^n\right) = 0$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m+1}^n}{h} - \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_m^n - v_{m+1}^n}{h} = 0$$

Разностная схема сеточно-характеристического метода

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\dfrac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}+\dfrac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}+\dfrac{v_m^n-v_{m-1}^n}{h}=0, \\ \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\dfrac{u_m^n-u_{m+1}^n}{h}-\dfrac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}-\dfrac{v_m^n-v_{m+1}^n}{h}=0. \end{cases}$$

аппроксимация

$O(\tau,h)$

устойчивость

Согласно ***спектральному признаку*** решение $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_m^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \lambda^n e^{im\varphi}$ подставляем в РС

$r = \frac{\tau}{h}$ - для краткости записи.

$$\begin{cases} \left(u_m^{n+1} - u_m^n\right) + r\left(u_m^n - u_{m-1}^n\right) + \left(v_m^{n+1} - v_m^n\right) + r\left(v_m^n - v_{m-1}^n\right) = 0, \\ \left(u_m^{n+1} - u_m^n\right) + r\left(u_m^n - u_{m+1}^n\right) - \left(v_m^{n+1} - v_m^n\right) - r\left(v_m^n - v_{m+1}^n\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1(\lambda - 1) + rc_1\left(1 - e^{-i\varphi}\right) + c_2(\lambda - 1) + rc_2\left(1 - e^{-i\varphi}\right) = 0, \\ c_1(\lambda - 1) + rc_1\left(1 - e^{i\varphi}\right) - c_2(\lambda - 1) - rc_2\left(1 - e^{i\varphi}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1\left[(\lambda-1)+r\left(1-e^{-i\varphi}\right)\right]+c_2\left[(\lambda-1)+r\left(1-e^{-i\varphi}\right)\right]=0, \\ c_1\left[(\lambda-1)+r\left(1-e^{i\varphi}\right)\right]-c_2\left[(\lambda-1)+r\left(1-e^{i\varphi}\right)\right]=0. \end{cases}$$

Для краткости записи обозначим

$$\left[(\lambda-1)+r\left(1-e^{-i\varphi}\right)\right]=\alpha, \qquad \left[(\lambda-1)+r\left(1-e^{i\varphi}\right)\right]=\beta$$

$$\begin{cases} c_1\alpha+c_2\alpha=0, \\ c_1\beta-c_2\beta=0. \end{cases}$$

$$(c_1)^2+(c_2)^2\neq 0 \Rightarrow 0=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{vmatrix}=-2\alpha\beta \rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{array}\right. \quad \left(\alpha=\overline{\beta}\right)$$

$$\lambda - 1 + r - re^{-i\varphi} = 0 \rightarrow$$

$$\lambda = 1 - r + re^{-i\varphi} = 1 - r + r\cos\varphi - ir\sin\varphi = 1 - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2} - ir\sin\varphi$$

$$|\lambda|^2 = \left(1 - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2 + r^2\sin^2\varphi = 1 - 4r\sin^2\frac{\varphi}{2} + 4r^2\sin^4\frac{\varphi}{2} + 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} =$$

$$= 1 - 4r\sin^2\frac{\varphi}{2} + 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 + 4r(r-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

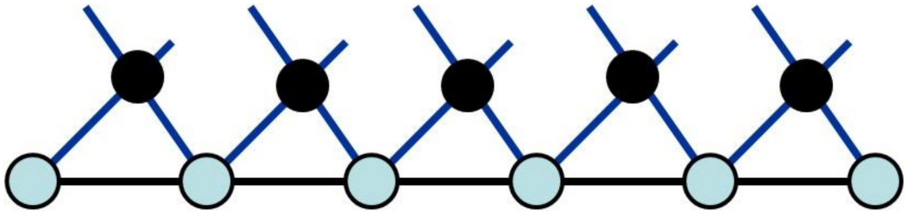
$|\lambda|^2 < 1$ при $r < 1$

$0 < 1 + 4r(r-1)\sin^2\frac{\varphi}{2} < 1 + 4r(r-1) = 1 - 4r + 4r^2 = (1-2r)^2$ при $\forall r$

Метод характеристик

Схема метода

❶  НУ на (регулярной) сетке

❷  Выпускаем из узлов характеристики и находим их точки пересечения - новые узлы сетки

❸ Используя соотношения на характеристиках, находим значения в узлах ●.

❹ И т.д.