2002/2003 21

4③ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx$.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Замечая, что $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5}dx$,

для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2-7x+5}dx$

и воспользоваться формулой

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5}dx = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2-7x+5}dx. \qquad (1)$$

② Для того чтобы применить теорему Коши[1] о вычетах[2], вводим функцию комплексной переменной $f(z)=\frac{e^{i8z}}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R,R]$ и полуокружности $C_R=\{z:|z|=R,\operatorname{Im}z\ge 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{i8x}}{(4x^2-7x+5)e^{i3}}dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R\to\infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z)=\frac{1}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha=8>0$, то условия леммы Жордана[3] выполнены и, следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz=0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i8x}}{(4x^2-7x+5)e^{i3}}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z)=\frac{e^{i8z}}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$, лежащие в верхней полуплоскости.

---

[1] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[2] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_a f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[3] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z|\ \operatorname{Im}z\ge 0,\ |z|=R_0>0\}$. Пусть число $\alpha>0$ и $C_R\overset{\Delta}{=}\{z|\ \ |z|=R,\operatorname{Im}z\ge 0\}$, $R>R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R)\overset{\Delta}{=}\max\{|\Phi(z)|\ \ z\in C_R\}$ при $R>R_0$. Если $\lim\limits_{R\to\infty}\varepsilon(R)=0$, то $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz=0$.

④ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{i8z}}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$[4] $=\dfrac{e^{i8z}}{4\left(z-\dfrac{7+i\sqrt{31}}{8}\right)\left(z-\dfrac{7-i\sqrt{31}}{8}\right)e^{i3}}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=\dfrac{7+i\sqrt{31}}{8}$ и $z=\dfrac{7-i\sqrt{31}}{8}$. Таким образом, точки $z=\dfrac{7+i\sqrt{31}}{8}$ и $z=\dfrac{7-i\sqrt{31}}{8}$ - полюса[5] 1-го порядка (ПП – простые полюса).

⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=\dfrac{7+i\sqrt{31}}{8}$ по формуле $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} f(z)=\lim\limits_{z\to\frac{7+i\sqrt{31}}{8}}\left(z-\dfrac{7+i\sqrt{31}}{8}\right)f(z)$. Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} f(z)=\left.\frac{e^{i8z}}{4\left(z-\dfrac{7-i\sqrt{31}}{8}\right)e^{i3}}\right|_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}}=\frac{e^{i7-\sqrt{31}}}{4\left(2\dfrac{i\sqrt{31}}{8}\right)e^{i3}}=\frac{-ie^{i4}}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}$$

⑥ Вычисляем несобственный интеграл по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i8x}}{(4x^2-7x+5)e^{i3}}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} f(z)=\frac{2\pi e^{i4}}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}=\frac{2\pi(\cos 4+i\sin 4)}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}.$$

⑦ Используя формулу (1), находим искомый интеграл:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5}dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2-7x+5}dx=\operatorname{Re}\frac{2\pi(\cos 4+i\sin 4)}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}=\frac{2\pi\cos 4}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}$$

Ответ: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx=\frac{2\pi\cos 4}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}}$

---

[4] $4z^2-7z+5=0$, $z_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot4}=\dfrac{7\pm i\sqrt{31}}{8}$

[5] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.