2002/2003 21

3④ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{ze^{2i/z}}{z-2i}dz$[1].

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 134 – 138 (примеры 11 - 15 стр. 134 – 137), Половинкин стр. 95 – 102 (пример 1 стр. 101 – 102)

① Находим особые точки $f(z)=\dfrac{ze^{2i/z}}{z-2i}$.

Особыми точками являются: $z=\infty$,

особые точки числителя: $z=0$,

и нули знаменателя: $z=2i$.

Внутри контура $\gamma=\{z:|z|=1\}$ находятся: $z=0$ - СОТ[2],

вне: $z=\infty$ - УОТ[3],

$z=2i$ - ПП (простой полюс – полюс 1-го порядка)[4]

② Интеграл $I=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{ze^{2i/z}}{z-2i}dz$, можно вычислять по формулам $I=2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)$[5] или $I=-2\pi i\left[\operatorname*{res}\limits_{z=2i} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)\right]$[6].

Заметим, что в данном случае вычисления по первой формуле сложнее, чем по второй.

③❶ Для нахождения вычета[7] функции $f(z)$ в точке $z=0$ разложим[8] эту функцию в ряд Лорана в кольце $0<|z|<2$. Получаем:

- если $|z|<2$, то

$$\frac{z}{z-2i}=-\frac{z}{2i}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2i}}=-\frac{z}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n;$$

---

[1] По умолчанию направление обхода считается положительным – против часовой стрелки.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[4] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[5] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[6] **Следствие.** Пусть функция f регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f=0$.

[7] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_a f=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[8] $\operatorname*{res}\limits_a f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

- если $|z| > 0$, то

$$e^{\frac{2i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2i}{z}\right)^n .$$

Таким образом, если $0 < |z| < 2$, то

$$f(z) = \left[-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^k\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2i}{z}\right)^n\right].$$

Умножая эти ряды, получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен

$$c_{-1} = -2i\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Вычисление суммы такого ряда часто оказывается затруднительным. Но в данном случае можно догадаться, что $c_{-1} = -2i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - 2\right) = -2i(e-2)$.

③❷ Вычислим интеграл I по второй формуле: $I = -2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]$. Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = ze^{2i/z}\Big|_{z=2i} = 2ie$$

Для нахождения вычета функции $f(z)$ в точке $z=\infty$[9] разложим эту функцию в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < \infty$. Получаем

$$f(z) = \frac{ze^{2i/z}}{z-2i} = \frac{e^{2i/z}}{1-\frac{2i}{z}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2i}{z}\right)^n\right] = \left(1+\frac{2i}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{2i}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$c_{-1} = 1\cdot 2i + 2i\cdot 1 = 4i$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -4i$.

④ По теореме Коши о вычетах

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i\left[-2i(e-2)\right] = 4\pi(e-2)$$

$$I = -2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right] = -2\pi i(2ie-4i) = 4\pi(e-2)$$

Ответ: $\boxed{\oint_{|z|=1}\frac{ze^{2i/z}}{z-2i}dz = 4\pi(e-2)}$

[9] $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.