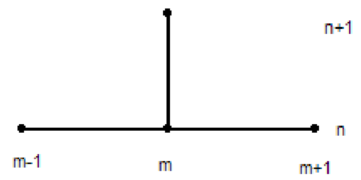
Дана гиперболическая система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-3\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=f(t,x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-3\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial x}=g(t,x) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+5\dfrac{\partial w}{\partial x}=h(t,x) \end{cases}$$



с начальными условиями $u(0,x)=\varphi_1(x),\ v(0,x)=\varphi_2(x),\ w(0,x)=\varphi_3(x)$.

А) $\boxed{6}$ Определить корректные постановки краевых условий для этой задачи из предложенных вариантов (если условия некорректны, указать, почему):

1) $u(t,0)+v(t,0)=\psi_1(t),\quad u(t,1)-v(t,1)+2w(t,1)=\psi_2(t),\quad u(t,0)-v(t,0)-w(t,0)=\psi_3(t).$

2) $u(t,1)+v(t,1)=\psi_1(t),\ u(t,0)-v(t,0)+2w(t,0)=\psi_2(t),\quad u(t,0)-v(t,0)-w(t,0)=\psi_3(t).$

3) $u(t,0)+v(t,0)=\psi_1(t),\ u(t,1)-v(t,1)+2w(t,1)=\psi_2(t),\quad u(t,1)-v(t,1)-w(t,1)=\psi_3(t).$

4) $u(t,0)+v(t,0)=\psi_1(t),\ u(t,0)-v(t,0)+2w(t,0)=\psi_2(t),\quad u(t,1)-v(t,1)-w(t,1)=\psi_3(t).$

Б) $\boxed{4}$ Предложить устойчивую разностную схему для решения данной системы уравнений на указанном шаблоне;

В) $\boxed{4}$ Показать порядок и способ вычисления неизвестных функций *u, v, w* на верхнем слое, включая граничные точки.

А) ① Запишем исходную систему в матричном виде: $\dfrac{\partial\vec{U}}{\partial t}+A\dfrac{\partial\vec{U}}{\partial x}=\vec{F}$,

где $\vec{U}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{pmatrix},\ \vec{F}=\begin{pmatrix}f(t,x)\\g(t,x)\\h(t,x)\end{pmatrix}$

② Найдем собственные значения матрицы A:

Характеристическое уравнение: $|A-\lambda E|=0$

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&1\\-3&1-\lambda&-1\\1&-1&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&5-\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&-1\\1&5-\lambda\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-3&1-\lambda\\1&-1\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)[(1-\lambda)(5-\lambda)-1]+3[3\lambda-15+1]+[3-1+\lambda]=$$

$$=(1-\lambda)[5-6\lambda+\lambda^2-1]+3[3\lambda-14]+[2+\lambda]=(1-\lambda)[4-6\lambda+\lambda^2]+9\lambda-42+2+\lambda=$$

$$=4-6\lambda+\lambda^2-4\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+10\lambda-40=-\lambda^3+7\lambda^2-36$$

«Угадываем» корень $\lambda=-2$

$\lambda^3-7\lambda^2+36=(\lambda+2)(\lambda^2+a\lambda+18)=\lambda^3+(2+a)\lambda^2+(18+2a)\lambda+36$ откуда $a=-9$ и

$\lambda^3-7\lambda^2+36=(\lambda+2)(\lambda^2-9\lambda+18)=(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$. Таким образом спектр матрицы $\boxed{\lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = 3\,,\ \lambda_3 = 6}$

Уже сейчас можем сказать, что на левой границе должно быть задано 2 граничных условия[1,2], а на правой – 1[3]. Поэтому условие 3)[4] не подходит.

③ Найдем левые собственные векторы[5] матрицы A[6]: $\mathbf{g}_i^{\mathrm{T}} A = \lambda_i \mathbf{g}_i^{\mathrm{T}}$ или $A^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_i = \lambda_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{pmatrix}$.

---

[1] $\lambda_2 = 3 > 0\,,\ \lambda_3 = 6 > 0$ - на левой границе 2 входящие характеристики

[2] Число ГУ соответствует числу входящих характеристик

[3] $\lambda_1 = -2 < 0$ - на правой границе 1 входящая характеристика

[4] $u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t),\ u(t,1) - v(t,1) + 2w(t,1) = \psi_2(t), \quad u(t,1) - v(t,1) - w(t,1) = \psi_3(t).$

[5] Левые собственные векторы – векторы-строки, удовлетворяющие равенству $\mathbf{g}^{\mathrm{T}} A = \lambda \mathbf{g}^{\mathrm{T}}$

[6] Цель – диагонализовать матрицу A, т.е. найти невырожденную замену $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{pmatrix}$, где S - матрица перехода, при которой $\widetilde{A} = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Если $\mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ h_{3i} \end{pmatrix}$, $i = 1 \div 3$ собственные векторы матрицы A, т.е. $A\mathbf{h}_i = \lambda_i \mathbf{h}_i$, то $S = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$ и нам предстоит находить S^{-1} ☹.

С другой стороны, $\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{pmatrix}$ - собственные векторы A^{T}: $A^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_i = \lambda_i \mathbf{g}_i$. Т.к. спектры матриц A и A^{T} совпадают (определяются из одного и того же характеристического уравнения), то $B = DA^{\mathrm{T}} D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, где $D = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$.

Т.о., $SAS^{-1} = \widetilde{A} = B = B^{\mathrm{T}} = \left(DA^{\mathrm{T}} D^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(D^{-1}\right)^{\mathrm{T}} AD^{\mathrm{T}}$,

т.е. можем положить $S^{-1} = D^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, где $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$: $\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda_1 E\right)\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1+2 & -3 & 1 \\ -3 & 1+2 & -1 \\ 1 & -1 & 5+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) \\ (2) \\ (1)+(2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) \\ (2)+3(1) \\ (3)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-7(2)}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{31} \\ g_{21} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Т.о. $\boxed{\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ и $\boxed{R_1 = u + v}$.

Т.к. условие для R_1 ставится на правой границе, то уже сейчас можно сказать, что условия 1)[7] и 4)[8] не подходят.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$: $\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda_2 E\right)\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 1-3 & -3 & 1 \\ -3 & 1-3 & -1 \\ 1 & -1 & 5-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) \\ (1)+2(3) \\ (2)+3(3)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) \\ -(2)/5 \\ (3)+(2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{32} \\ g_{22} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Т.о. $\boxed{\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ и $\boxed{R_2 = u - v - w}$.

$\boxed{\lambda_3 = 6}$: $\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda_3 E\right)\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 1-6 & -3 & 1 \\ -3 & 1-6 & -1 \\ 1 & -1 & 5-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) \\ (1)+5(3) \\ (2)+3(3)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) \\ -(2)/8 \\ (3)-(2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$\begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{33} \\ g_{23} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Т.о. $\boxed{\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ и $\boxed{R_3 = u - v + 2w}$.

---

[7] $u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,1) - v(t,1) + 2w(t,1) = \psi_2(t), \quad u(t,0) - v(t,0) - w(t,0) = \psi_3(t).$

[8] $u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t),\ u(t,0) - v(t,0) + 2w(t,0) = \psi_2(t), \quad u(t,1) - v(t,1) - w(t,1) = \psi_3(t).$

Т.к. условие для R_2 и R_3 ставится на левой границе, то условие 2)[9] поставлено корректно.

Б) В) В новых переменных система распадается на три уравнения для каждого из инвариантов римана, которые будем решать независимо:

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} - 2\frac{\partial R_1}{\partial x} = f + g\,,\ \frac{\partial R_2}{\partial t} + 3\frac{\partial R_2}{\partial x} = f - g - h\,,\ \frac{\partial R_3}{\partial t} + 6\frac{\partial R_3}{\partial x} = f - g + 2h\,.$$

Для первого уравнения простейшая схема первого порядка (правый явный уголок)

$\dfrac{p_m^{n+1} - p_m^n}{\tau} - 2\dfrac{p_{m+1}^n - p_m^n}{h} = \left(f + g\right)_m^n$ будет устойчивой и монотонной при выполнении условия куранта[10] $0 < \sigma_1 < \dfrac{2\tau}{h} < 1$[11].

По этой схеме рассчитываем значения во внутренних узлах и на левой границе.

Для второго и третьего уравнений простейшие схемы первого порядка (левый явный уголок)

$\dfrac{q_m^{n+1} - q_m^n}{\tau} + 3\dfrac{q_m^n - q_{m-1}^n}{h} = \left(f - g - h\right)_m^n$ и $\dfrac{r_m^{n+1} - r_m^n}{\tau} + 6\dfrac{r_m^n - r_{m-1}^n}{h} = \left(f - g + 2h\right)_m^n$ будут устойчивы и монотонны при выполнении условий куранта $0 < \sigma_2 < \dfrac{3\tau}{h} < 1$ и $0 < \sigma_3 < \dfrac{6\tau}{h} < 1$, соответственно.

По этим схемам рассчитываем значения во внутренних узлах и на правой границе.

Для выполнения условий куранта во всех трех случаях на предложенном шаблоне выбирает отношение шагов $\dfrac{\tau}{h} < \dfrac{1}{6}$.

---

[9] $u(t,1) + v(t,1) = \psi_1(t),\ u(t,0) - v(t,0) + 2w(t,0) = \psi_2(t), \quad u(t,0) - v(t,0) - w(t,0) = \psi_3(t).$

[10] Условие Куранта-Фридрикса-Леви: Пусть область влияния разностной схемы содержит в себе область влияния дифференциального уравнения. Разностная схема является неустойчивой, если это условие не выполнено.

[11] Характеристики $x = at + c$ уравнения в частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f$ находим из уравнения $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{a}$.