Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - ix + 2}\,dx$.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Используя формулу $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - ix + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx = = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[I_1 + I_2\right]. \qquad (1)$$

Для решения задачи достаточно вычислить несобственные интегралы $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx$ и $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx$.

② Для того чтобы применить теорему Коши[1] о вычетах[2] к первому их этих интегралов I_1, вводим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - iz + 2}$.

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и полуокружности $C_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R \to \infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z) = \frac{1}{z^2 - iz + 2}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha = 1 > 0$, то условия леммы Жордана[3] выполнены и, следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - ix + 2}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - iz + 2}$, лежащие в верхней полуплоскости.

---

[1] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f$.

[2] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{o}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z - a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[3] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z |\ \operatorname{Im} z \ge 0, |z| = R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \overset{\Delta}{=} \{z |\ \ |z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, $R > R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R) \overset{\Delta}{=} \max\{|\Phi(z)| \ \ z \in C_R\}$ при $R > R_0$. Если $\lim\limits_{R\to\infty} \varepsilon(R) = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz = 0$.

④ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2-iz+2}=\dfrac{e^{iz}}{(z+i)(z-2i)}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=-i$ и $z=2i$. Таким образом, точки $z=-i$ и $z=2i$ - полюса[4] 1-го порядка (ПП – простые полюса). Внутрь контура попадает ИОТОХ $z=2i$.

⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=2i$ по формуле $\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)$. Получаем $\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=\left.\dfrac{e^{iz}}{(z+i)}\right|_{z=2i}=$

$=\dfrac{e^{-2}}{3i}$.

⑥ Вычисляем несобственный интеграл I_1 по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2-ix+2}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=2\pi i\frac{e^{-2}}{3i}=\boxed{\frac{2\pi e^{-2}}{3}}. \qquad (4)$$

⑦ Второй интеграл I_2 можно, например, вычислить следующим способом: чтобы применить лемму Жордана[5] в приведенной формулировке, проведем замену x на $-x$:

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x^2-ix+2}dx=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{ix}}{(-x)^2-i(-x)+2}d(-x)=-\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+ix+2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+ix+2}dx.$$

Дальнейший алгоритм полностью повторяет алгоритм предложенный для вычисления интеграла I_1:

❶ водим функцию комплексной переменной $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+iz+2}$

❷ и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R,R]$ и полуокружности $C_R=\{z:|z|=R,\operatorname{Im} z\ge 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k=1,2,\dots,n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint_\Gamma f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+ix+2}dx+\int_{C_R} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (5)$$

❸ Переходим к пределу при $R\to\infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z)=\dfrac{1}{z^2+iz+2}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha=1>0$, то условия леммы Жордана[6] выполнены и, следовательно, $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$.

Поскольку правая часть в (5) не зависит от R, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+ix+2}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (6)$$

---

[4] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.

[5] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z|\ \operatorname{Im} z\ge 0,\ |z|=R_0>0\}$. Пусть число $\alpha>0$ и $C_R\overset{\Delta}{=}\{z|\quad |z|=R,\operatorname{Im} z\ge 0\}$, $R>R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R)\overset{\Delta}{=}\max\{|\Phi(z)|\quad z\in C_R\}$ при $R>R_0$. Если $\lim_{R\to\infty}\varepsilon(R)=0$, то $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz=0$.

[6] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z|\ \operatorname{Im} z\ge 0,\ |z|=R_0>0\}$. Пусть число $\alpha>0$ и $C_R\overset{\Delta}{=}\{z|\quad |z|=R,\operatorname{Im} z\ge 0\}$, $R>R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R)\overset{\Delta}{=}\max\{|\Phi(z)|\quad z\in C_R\}$ при $R>R_0$. Если $\lim_{R\to\infty}\varepsilon(R)=0$, то $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz=0$.

где z_k - особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+iz+2}$, лежащие в верхней полуплоскости.

❹ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+iz+2} = \dfrac{e^{iz}}{(z-i)(z+2i)}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=i$ и $z=-2i$. Таким образом, точки $z=i$ и $z=-2i$ - полюса[7] 1-го порядка (ПП – простые полюса). Внутрь контура попадает ИОТОХ $z=i$.

❺ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=i$ по формуле $\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-i)f(z)$. Получаем $\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=\left.\dfrac{e^{iz}}{(z+2i)}\right|_{z=2i} =$

$= \dfrac{e^{-1}}{3i}$.

❻Вычисляем несобственный интеграл I_2 по формуле (6):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+ix+2}dx = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\frac{e^{-1}}{3i} = \boxed{\frac{2\pi e^{-1}}{3}}. \qquad (7)$$

⑧ Используя формулы (1), (4) и (7), находим искомый интеграл:

$$I = \frac{1}{2}[I_1+I_2] = \frac{\pi e^{-2}}{3} + \frac{\pi e^{-1}}{3} = \frac{\pi}{3e^2}(1+e).$$

Ответ: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-ix+2}dx = \frac{\pi(1+e)}{3e^2}}$

[7] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathrm{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_{\rho}(a)\to \mathrm{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.