YII 1. б)

(2000/01) Доказать, что уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+\left(x^2+\nu^2\right)y=0,\ x>0.$$

Не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе с первыми производными.

Определение. (Романко Гл. 6, §2, стр. 175) Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x),\dots,y_n(x)$ уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0 \qquad (1)$$

называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\ \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots\ \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots\ \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots\ \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W\left[y_1(x),\dots,y_n(x)\right]$.

Теорема 4. (Романко Гл. 6, §2, стр. 176) Пусть $W(x)$ - определителем Вронского решений $y_1(x),\dots,y_n(x)$ уравнения (1) и пусть $x_0\in[\alpha,\beta]$. Тогда для всех $x\in[\alpha,\beta]$ справедлива формула Лиувилля-Остроградского

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a_1(\zeta)d\zeta}.$$

Замечание. (Романко Гл. 6, §2, стр. 176) В случае, когда $n=2$ и известно частное решение $y_1(x)\neq 0$ на $[\alpha,\beta]$ уравнения (1), то формула Лиувилля-Остроградского позволяет найти решение (1) в квадратурах. В самом деле, из формулы Лиувилля-Остроградского для решений $y_1(x)$ и $y(x)$ имеем, что

$$y_1y'-yy_1'=c_1e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(\zeta)d\zeta},$$

где c - постоянная. Разделив это уравнение на $y_1^2(x)$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{c_1}{y_1^{\,2}}e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(\zeta)d\zeta}.$$

Откуда получаем, что

$$y(x)=c_1y_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{\tau}a_1(\zeta)d\zeta}\frac{d\tau}{y_1^2(\tau)}+c_2y_1(x).$$

Допустим противное: уравнение Бесселя имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, ограниченные вместе с первыми производными в окрестности нуля.

Т.к. произведение ограниченных функций есть ограниченная функция, сумма ограниченных функций есть ограниченная функция, то $y_1y_2'-y_2y_1'$ - ограниченная функция, согласно предположению.

$y_1y_2'-y_2y_1'=c_1e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(\zeta)d\zeta}=c_1e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{\zeta}{\zeta^2}d\zeta}=c_1e^{-\ln\zeta\big|_{x_0}^{x}}=c_1e^{-\ln x+\ln x_0}=c_1\dfrac{e^{\ln x_0}}{e^{\ln x}}=c_1\dfrac{x_0}{x}$ - эта функция не ограничена в окрестности нуля. Полученное противоречие доказывает утверждение.

YII.3 в)

(00/01) Доказать, что любое решение уравнения Бесселя $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ имеет бесконечное число нулей на $(0;+\infty)$.

📖 ✍ Пусть заданы два уравнения:

$$y''+q(x)y=0, \qquad (1)$$

$$y''+Q(x)y=0, \qquad (2)$$

где $q(x)$ и $Q(x)$ - заданные непрерывные функции на промежутке I.

📖 ✍ **Теорема «Штурма»**[1]. (Романко. Гл. 6, §5, стр. 194) Пусть $q(x)\le Q(x)$, $\forall x\in I$, и пусть $y(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (1), а $z(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (2). Если $x_1,x_2\in I$ последовательные нули $y(x)$, то найдется хотя бы одна точка $x\in(x_1,x_2)$, в которой $z(x_0)=0$, либо $z(x_1)=z(x_2)=0$.

📖 ✍ **Определение**. (Степанов. Гл. 6, §2, стр. 251) Если решение дифференциального уравнения имеет в данном интервале не более одного нуля, то оно называется ***неколеблющимся*** в данном интервале, в противном случае - ***колеблющимся***.

✍ Приведем уравнение Бесселя к виду, не содержащему слагаемого с первой производной. Для этого используем подстановку $y=u(x)z$[2].

✍ $y'=u'z+uz'$, $y''=u''z+2u'z'+uz''$.

✍ Уравнеие Бесселя принимает вид $x^2u''z+2x^2u'z'+x^2uz''+xu'z+xuz'+\left(x^2-\nu^2\right)uz=0$ или $x^2uz''+\left(2x^2u'+xu\right)z'+\left(x^2u''+xu'+x^2u-u\nu^2\right)z=0$.

✍ Полагаем $\left(2x^2u'+xu\right)z'=0$, откуда $2x^2u'+xu=0$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$ → $\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln|x|+\ln C$ или $u=\frac{1}{\sqrt{x}}$[3].

Уравнеие Бесселя принимает вид $\frac{x^2}{\sqrt{x}}z''+\left(x^2\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{x^{5/2}}+x\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{x^{3/2}}u'+\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{\nu^2}{\sqrt{x}}\right)z=0$, или

$x^2z''+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)+x^2-\nu^2\right)z=0$, или $z''+\left(1+\frac{\frac{1}{4}-\upsilon^2}{x^2}\right)z=0$ - приведенное уравнение Бесселя.

✍ При $\upsilon^2\le\frac{1}{4}$ $Q(x)=1+\frac{\frac{1}{4}-\upsilon^2}{x^2}>1$; при $\upsilon^2>\frac{1}{4}$ $Q(x)>\frac{1}{2}$ для $x>x_0=\sqrt{2\left|\frac{1}{4}-\upsilon^2\right|}$[4] ⇒

$Q(x)>\frac{1}{2}=q(x)$, т.е. согласно теореме сравнения («Штурма») расстояние между соседними нулями уравнения Бесселя <u>не больше</u>, чем расстояние между соседними нулями решения уравнения $y''+\frac{1}{2}y=0$,

---

[1] Федорюк, Степанов называют эту теорему теоремой сравнения.
Теорема Штурма (этих авторов) ≡ Следствие 2. Гл. 6, §5, стр. 195 у Романко.

[2] Данная подстановка не меняет колебательного характера решения, т.к. для $p_0y''+p_1y'+p_2y=0$ легко убедиться, что $u(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx$.

[3] Значение произвольной постоянной C на данном этапе особой роли не играет, выбираем любое ее значение исходя из соображений удобства.

[4] $1+\frac{\frac{1}{4}-\upsilon^2}{x^2}>\frac{1}{2}$ → $\frac{1}{2}>\frac{\upsilon^2-\frac{1}{4}}{x^2}$ → $x^2>2\left(\upsilon^2-\frac{1}{4}\right)$

его решение имеет вид $y = C_1 \sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \alpha\right)$.

Т.о. нулей у уравнения $y'' + \frac{1}{2} y = 0$ бесконечно много,

и расстояние между нулями $\sqrt{2}\pi$.

$\Rightarrow$ нулей у уравнения Бесселя бесконечно много, и расстояние между ними не больше $\sqrt{2}\pi$.

YII.3 г)

(00/01) Доказать, что при $x \to +\infty$ расстояние между последовательными нулями уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$, $(x > 0)$ стремится к π.

🕮 ✍ Пусть заданы два уравнения:

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

$$y'' + Q(x)y = 0, \quad (2)$$

где $q(x)$ и $Q(x)$ - заданные непрерывные функции на промежутке $\mathcal{I}$.

🕮 ✍ **Теорема «Штурма»**[5]. (Романко. Гл. 6, §5, стр. 194) Пусть $q(x) \le Q(x)$, $\forall x \in \mathcal{I}$, и пусть $y(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (1), а $z(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (2). Если $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ последовательные нули $y(x)$, то найдется хотя бы одна точка $x \in (x_1, x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

🕮 ✍ **Определение**. (Степанов. Гл. 6, §2, стр. 251) Если решение дифференциального уравнения имеет в данном интервале не более одного нуля, то оно называется ***неколеблющимся*** в данном интервале, в противном случае - ***колеблющимся***.

✍ Приведем уравнение Бесселя к виду, не содержащему слагаемого с первой производной. Для этого используем подстановку $y = u(x)z$[6].

✍ $y' = u'z + uz'$, $y'' = u''z + 2u'z' + uz''$.

✍ Уравнение Бесселя принимает вид $x^2u''z + 2x^2u'z' + x^2uz'' + xu'z + xuz' + \left(x^2 - \nu^2\right)uz = 0$ или $x^2uz'' + \left(2x^2u' + xu\right)z' + \left(x^2u'' + xu' + x^2u - u\nu^2\right)z = 0$.

✍ Полагаем $\left(2x^2u' + xu\right)z' = 0$, откуда $2x^2u' + xu = 0$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \rightarrow \ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|x| + \ln C \text{ или } u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$ [7].

Уравнение Бесселя принимает вид $\frac{x^2}{\sqrt{x}}z'' + \left(x^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{x^{5/2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{\nu^2}{\sqrt{x}}\right)z = 0$, или

$x^2z'' + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) + x^2 - \nu^2\right)z = 0$, или $z'' + \left(1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x^2}\right)z = 0$ - приведенное уравнение Бесселя.

✍ Используем тот факт, что уравнение $y'' + my = 0$ имеет решение $y = C_1 \sin\sqrt{m}x + C_2 \cos\sqrt{m}x = A\sin\left(\sqrt{m}x + \alpha\right)$, расстояние между нулями которого $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

① ✍ При $\upsilon^2 \le \frac{1}{4}$ $Q(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x^2} > 1$ $\Rightarrow$ согласно теореме сравнения («Штурма») расстояние между соседними нулями уравнения Бесселя $l \le \pi$.

---

[5] Федорюк, Степанов называют эту теорему теоремой сравнения.
Теорема Штурма (этих авторов) ≡ Следствие 2. Гл. 6, §5, стр. 195 у Романко.

[6] Данная подстановка не меняет колебательного характера решения, т.к. для $p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0$ легко убедиться, что $u(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx$.

[7] Значение произвольной постоянной C на данном этапе особой роли не играет, выбираем любое ее значение исходя из соображений удобства.

✍ С другой стороны, для $x > x_0$ $q(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x^2} < 1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x_0^2}$ $\Rightarrow l \ge \pi \left(1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Т.о., имеет место следующая оценка $\pi \ge l \ge \pi \left(1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Т. к. $\lim\limits_{x_0 \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x_0^2}\right) = 1$, то $l \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi$.

② ✍ При $\upsilon^2 > \frac{1}{4}$ $q(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{4} - \upsilon^2}{x^2} < 1$ $\Rightarrow$ согласно теореме сравнения («Штурма») расстояние между соседними нулями уравнения Бесселя $L \ge \pi$.

✍ С другой стороны, для $x > x_0$ $Q(x) = 1 - \dfrac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} > 1 - \dfrac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2}$ $\Rightarrow L \le \pi \left(1 - \dfrac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Т.о., имеет место следующая оценка $\pi \le L \le \pi \left(1 - \dfrac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Т. к. $\lim\limits_{x_0 \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2}\right) = 1$, то $L \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi$.

☝ Объединяя результаты ① и ②, приходим к выводу, что при неограниченном возрастании x, колебательный характер функций Бесселя (решений уравнения Бесселя) приближается к колебательному характеру функций $\sin x$ и $\cos x$, являющимися решениями предельного уравнения $y'' + my = 0$.