

# 1. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

## 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Принцип суперпозиции для линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + xy' - y = x$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = \frac{1}{2}$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + 4y'' = 64(x + \sin 2x)$ .

## 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Каноническая форма системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{5}{2}y + \frac{13}{2}z, \\ \dot{y} = -4x + 3y + 5z, \\ \dot{z} = -4x + 5y + 3z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2).$$

## 3. Матричная экспонента

1. Норма матрицы.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = 4x, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$  методом матричной экспоненты.

## 4. Операционный метод

1. Оригинал.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = \cos^2 ax$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = 3$ .

✂

-----

## 2. ДУ 2 курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Линейно-независимые решения.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 3$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{IV} - 8y'' - 9y = 5 \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 - 4e^{-x}.$$

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Нормальная форма Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 2z, \end{cases}$$

$$(\lambda_{1,2,3} = -3).$$

### 3. Матричная экспонента

1. Свойство подчиненности матричной нормы векторной.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Изображение.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши 
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = -1.$$

### 3. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

#### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Определитель Вронского.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2y = \frac{6}{x}$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 0$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y''' + a^2 y' = \cos x$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

#### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Линейно-независимые решения.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2z, \\ \dot{y} = -3y + z, \\ \dot{z} = -x + y - 4z, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2,3} = -3$ ).

#### 3. Матричная экспонента

1. Свойство согласованности матричной и векторной норм.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

#### 4. Операционный метод

1. Преобразование Лапласа.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = \sin^2 ax$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' + 4y = \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = -1$ .



-----

#### 4. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

##### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = \frac{3}{x^2}$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0, y'(1) = -1$ .
3. Найти все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + y'' = 6 \sin x - 2 \sin 3x$ .

##### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Определитель Вронского.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 4y. \end{cases}$$
3. Найти все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y - 3z, \\ \dot{y} = 2x - 4y - 2z, \\ \dot{z} = 2x - 3y - 4z, \end{cases}$$
  
 $(\lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = -3)$ .

##### 3. Матричная экспонента

1. Кубическая норма матрицы.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

##### 4. Операционный метод

1. Необходимое условие для изображения.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2 \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases}, x(0) = -1, y(0) = 0.$$

## 5. ДУ 2 курс 3 семестр 1 задание

### 2 задание

#### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Формула общего решения линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0, y'(1) = 1$ .
3. Найти все действительные решения уравнения  $y^{IV} - 2y''' + 2y'' = (6x - e^x)^2$ .

#### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Альтернатива для Вронскиана.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - 3y. \end{cases}$$
3. Найти все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y - 3z, \\ \dot{y} = 2x - 4y - 2z, \\ \dot{z} = 2x - 3y - 4z, \end{cases}$$

$$(\lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = -3).$$

#### 3. Матричная экспонента

1. Октаэдрическая норма матрицы.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 4y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

#### 4. Операционный метод

1. Основная идея операционного метода.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = x \sin ax$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y''' + y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1$ .



-----

## 6. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Структура решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + xy' - y = \frac{2}{x}$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 2, y'(1) = -1$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y'' + 2ay' + a^2 y = e^{-x}$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная матрица.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 9y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -8x + 8y + z, \\ \dot{y} = -4x + 3y + z, \\ \dot{z} = -4x + 5y - z, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2,3} = -2$ ).

### 3. Матричная экспонента

1. Норма Фробениуса.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - 3y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Обратное преобразование Лапласа.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{p}{(p-a)(p-b)}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3, y''(0) = 9$ .

## 7. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Принцип суперпозиции для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 1$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + 4y'' = 16(x + \cos 2x)$

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Формула общего решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -4x + 5y. \end{cases}$$

3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = 7x + 4y - z, \\ \dot{z} = 13x + 7y - 3z, \end{cases}$$

$$(\lambda_{1,2,3} = 1).$$

### 3. Матричная экспонента

1. Сходимость последовательности матриц.

2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 9y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Линейность преобразования Лапласа.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = x \cos ax$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 3$ .



-----

## 8. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Формула общего решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2y = 3x^2$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 0$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{IV} + 3y'' - 4y = (\sin x + \cos x)^2 - 8e^{2x}$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Принцип суперпозиции для однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 9y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = 2x + y - 3z, \\ \dot{z} = -2x + y + 3z, \end{cases}$$
  
 $(\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \pm i)$ .

### 3. Матричная экспонента

1. Сумма матричного ряда.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -4x + 5y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Подобие.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши 
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = -1.$$



## 9. ДУ 2 курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Метод вариации постоянного.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 3x$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = -2$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y''' + a^2 y' = \sin x$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Структура решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 8y, \\ \dot{y} = 2x - 7y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 4y + 10z, \\ \dot{y} = 14x - 12y + 27z, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 8z, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ ,  $\lambda_3 = 2$ ).

### 3. Матричная экспонента

1.  $A$  - квадратная матрица. Где сходится ряд  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p A^p}{p!}$ ?
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 9y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Смещение.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = e^{ax} \cos bx$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' + 4y = \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .



-----

## 10. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Характеристическое уравнение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^3$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0, y'(1) = 1$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + y'' = 2 \cos 3x + 6 \cos x$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Принцип суперпозиции для неоднородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - 5y. \end{cases}$$

3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y - z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - 5z, \end{cases}$$

$$(\lambda_{1,2,3} = -3).$$

### 3. Матричная экспонента

1.  $A$  и  $B$  - квадратные матрицы одного размера. Справедливо ли равенство  $e^A e^B = e^{A+B}$ ?

2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 8y, \\ \dot{y} = 2x - 7y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Запозывание.

2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$ .

3. Решите операционным методом задачу Коши 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2 \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases}, x(0) = -1, y(0) = 0.$$

## 11. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка в случае простых корней характеристического уравнения.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + xy' - y = x$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = \frac{1}{2}$ .
3. Найти все действительные решения уравнения  $y^{IV} + 2y''' + 5y'' = 3(5x + 2e^{-x})^2$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Метод вариации постоянных.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - 5y. \end{cases}$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 8y + z, \\ \dot{y} = -4x + 7y + z, \\ \dot{z} = -4x + 5y + 3z, \end{cases} (\lambda_{1,2,3} = 2).$

### 3. Матричная экспонента

1. Обратная к матричной экспоненте матрица.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - 5y. \end{cases}$  методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Дифференцирование оригинала.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = e^{ax} \sin bx$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y''' + y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1$ .



-----

## 12. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка в случае кратных корней характеристического уравнения.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 3$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y'' + 2ay' + a^2 y = e^{-x}$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений в случае простых собственных значений матрицы системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 8y, \\ \dot{y} = 2x - 7y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = -5x + 4y - z, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2,3} = 2$ ).

### 3. Матричная экспонента

1. Доказать невырожденность матричной экспоненты.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Интегрирование оригинала.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3, y''(0) = 9$ .

### 13. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

#### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка в случае, когда правая часть является квазиполиномом.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2y = \frac{6}{x}$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 0$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + 4y'' = 64(x + \sin 2x)$ .

#### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Жордановы цепочки.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 9y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y - 6z, \\ \dot{y} = x + y + 5z, \\ \dot{z} = x - 2y + 7z, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2,3} = 3$ ).

#### 3. Матричная экспонента

1. Найдите  $\frac{d}{dx} e^{xA}$ .
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

#### 4. Операционный метод

1. Дифференцирование изображения.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{a - b}$  ..
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = 3$ .



-----

## 14. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Уравнение Эйлера.

2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = \frac{3}{x^2}$ .

Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = -1$ .

3. Найти все действительные решения уравнения

$$y^{IV} - 8y'' - 9y = 5 \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 - 4e^{-x}.$$

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме.

2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -4x + 5y. \end{cases}$

3. Найти все действительные решения системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = 10x + y - 8z, \\ \dot{y} = 9x + 4y - 10z, \\ \dot{z} = 8x + y - 6z, \end{cases}$

$$(\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 2).$$

### 3. Матричная экспонента

1. Матричная экспонента в базисе из собственных векторов матрицы  $A$ .

2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Решите систему уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$  методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Интегрирование изображения.

2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$ .

3. Решите операционным методом задачу Коши  $\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = -1.$

## 15. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Принцип суперпозиции для линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 1$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y''' + a^2 y' = \cos x$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений в случае кратных собственных значений матрицы системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 9y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + 3z, \\ \dot{y} = 4x + 6y - 7z, \\ \dot{z} = x + y, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2,3} = 2$ ).

### 3. Матричная экспонента

1. Матричная экспонента в жордановом базисе матрицы  $A$ .
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Оригинал.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{a - b}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' + 4y = \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .



-----

## 16. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Линейно-независимые решения.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + xy' - y = \frac{2}{x}$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 2, y'(1) = -1$ .
3. Найти все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + y'' = 6 \sin x - 2 \sin 3x$

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Выделение вещественных решений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - 3y. \end{cases}$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -16x + 25y - 7z, \\ \dot{y} = -8x + 14y - 6z, \\ \dot{z} = -8x + 10y - 2z, \end{cases} (\lambda_1 = 4, \lambda_{2,3} = -4).$

### 3. Матричная экспонента

1. Представление общего решения однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами через экспоненту матрицы системы.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 4y. \end{cases}$  методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Изображение.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $\begin{cases} \dot{x} = -y + 2 \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases}, x(0) = -1, y(0) = 0.$



## 17. ДУ 2 курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Определитель Вронского.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 1$ .
3. Найти все действительные решения уравнения  $y^{IV} - 2y''' + 2y'' = (6x - e^x)^2$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Метод неопределенных коэффициентов для поиска общего решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} x' = -2x + 3y, \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} x' = x + y - z, \\ y' = -x + 4y - 2z, \\ z' = -2x + 5y - 2z, \end{cases}$$
  
( $\lambda_{1,2,3} = 1$ ).

### 3. Матричная экспонента

1. Представление общего решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами через экспоненту матрицы системы.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -2x - 3y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Преобразование Лапласа.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = \frac{a \sin ax - b \sin bx}{a^2 - b^2}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y''' + y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1$ .



-----

## 18. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 2y = 3x^2$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = 0$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y'' + 2ay' + a^2 y = e^{-x}$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда правая часть является вектором квазиполиномом.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$
3. Найти все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y - 6z, \\ \dot{y} = -3x + 2y + 4z, \\ \dot{z} = x + 2y, \end{cases}$$
  
 $(\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i)$ .

### 3. Матричная экспонента

1. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 9y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Основная идея операционного метода.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3, y''(0) = 9$ .

## 19. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Формула общего решения линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 3x$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = -2$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{(4)} + 4y'' = 16(x + \cos 2x)$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Каноническая форма системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 7x + 9y - 6z, \\ \dot{z} = 6x + 8y - 5z, \end{cases}$$

$$(\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_3 = 3).$$

### 3. Матричная экспонента

1. Норма матрицы.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -4x + 5y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты

### 4. Операционный метод

1. Обратное преобразование Лапласа.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = \frac{a \sin bx - b \sin ax}{a^2 - b^2}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ .



-----

## 20. ДУ 2 курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Структура решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^3$ .  
Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 0, y'(1) = 1$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y^{IV} + 3y'' - 4y = (\sin x + \cos x)^2 - 8e^{2x}$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Нормальная форма Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 8y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + 7y + z, \\ \dot{z} = x + 2y + 3z, \end{cases}$$
  
 $(\lambda_{1,2,3} = 3)$ .

### 3. Матричная экспонента

1. Свойство подчиненности матричной нормы векторной.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 9y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$
 методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Линейность преобразования Лапласа.
2. Найдите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши 
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = -1.$$

## 21. ДУ 2курс 3 семестр 2 задание

### 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Принцип суперпозиции для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $x^2 y'' + xy' - y = x$ . Решите для этого уравнения задачу Коши  $y(1) = 1, y'(1) = \frac{1}{2}$ .
3. Найдите все действительные решения уравнения  $y''' + a^2 y' = \sin x$  при всевозможных положительных значениях параметра  $a$ .

### 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Линейно-независимые решения.
2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$
3. Найдите все действительные решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{5}{2}y + \frac{13}{2}z, \\ \dot{y} = -4x + 3y + 5z, \\ \dot{z} = -4x + 5y + 3z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2).$$

### 3. Матричная экспонента

1. Свойство согласованности матричной и векторной норм.
2. Найдите  $e^A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Решите систему уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = x - 8y, \\ \dot{y} = 2x - 7y. \end{cases}$  методом матричной экспоненты.

### 4. Операционный метод

1. Подобие.
2. Найдите изображение по оригиналу  $f(x) = e^{ax} \left( x + \frac{1}{2} ax^2 \right)$ .
3. Решите операционным методом задачу Коши  $y'' + 4y = \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = -1$ .