Лекция 1.

Гл. I. Основные понятия. Простейшие типы ДУ.

§1. Введение.

Термин aequatio differenrialis или дифференциальные уравнения был введен Лейбницем (Leibniz) в 1676 г. для обозначения зависимости между дифференциалами dx и dy двух переменных x и y.

В настоящее время используется следующее

Определение. ***Дифференциальное уравнение*** (ДУ) - уравнение связывающее

- значения независимых переменных,
- со значениями функций и
- значениями производных функций, порядок которых формально ничем не ограничен.

Замечание 1.1. Подразумевается, что ДУ не является тождеством:

Так $\dfrac{dy}{dx} = x$ - ДУ,

а $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1$ - не ДУ (дифференциальное тождество).

Вне зависимости от числа независимых и зависимых переменных

Определение. Порядком ДУ называют наивысший порядок производной, входящей в это ДУ.

ДУ классифицируются по числу содержащихся в них независимых переменных.

<u>ДУ</u>

$\swarrow \quad \searrow$

дифференциальные уравнения в частных производных (ДУвЧП)	Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

ДУвЧП содержит зависимую переменную и две или более независимых переменных вместе с частными производными зависимой переменной относительно независимых:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ y).$$

ОДУ выражает зависимость между независимой переменной (аргументом), зависимой переменной (функцией) и одной или более производными функции.

В этом курсе будем изучать ОДУ.

x - независимое переменное.
$y = y(x)$ - искомая функция.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ и т.д.

Замечание 1.2. Искомая функция может быть и вектор-функцией $\vec{y} = \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$.

В этом случае под $\vec{y}\,' = \dfrac{d\vec{y}}{dx}$ будем понимать вектор-столбец $\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1(x)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} \end{pmatrix}$.

Определение. Уравнение вида

$$F\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{1.1}$$

связывающее

- независимое переменное x,
- искомую функцию $y(x)$ и
- ее производные $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$

называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***.

Уравнение (1.1) - ОДУ ***в общем виде***.

Введем в рассмотрение

I - промежуток числовой оси: конечный или бесконечный
отрезок $[a, b]$,
интервал (a, b),
полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$.

$C(I)$ - множество непрерывных на I функций.
$C^k(I)$ - множество k раз непрерывно дифференцируемых на I функций.

Замечание 1.2. В дальнейшем будем решать системы ОДУ, а их решение искать в виде вектор-функции $\bar{y}(x) \in \mathbb{R}^n_{\bar{y}}$.

$D \subseteq \mathbb{R}^n_{\bar{y}}$, где $D : I \xrightarrow{\bar{y}(x)} \mathbb{R}^n_{\bar{y}}$.
$G = I \times D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}_{x,\bar{y}}$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}_{x, y, y', \dots, y^{(n)}}$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что $F\big(x,\, y(x),\, y'(x),\, \dots,\, y^{(n)}(x)\big) \in C(\Omega)$.

Цель: найти решение ОДУ n-го порядка (1.1).

Определение. Решением ОДУ n-го порядка (1.1) на I называется функция $y = \varphi(x)$, заданная на I, если
1) $\varphi(x) \in C^n(I)$,
2) $\forall x \in I$ точка $\big(x,\, y(x),\, y'(x),\, \dots,\, y^{(n)}(x)\big) \in \Omega$,
3) $F\big(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \dots,\, \varphi^{(n)}(x)\big) \equiv 0 \;\; \forall x \in I$.

График решения ОДУ (1.1) $y = \varphi(x)$, $x \in I$, на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,\,y}$ называется ***интегральной кривой*** ОДУ (1.1).

Часто ОДУ (1.1) можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)}(x) = f\big(x,\, y(x),\, y'(x),\, \dots,\, y^{(n-1)}(x)\big). \qquad (1.2)$$

ОДУ n-го порядка, разрешенные относительно производной, называют уравнениями ***в нормальной форме*** (виде) (форме [виде] Коши).

ОДУ в нормальной форме (1.2) являются наиболее простыми для изучения.

Пусть $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{1+n}_{x, y, y', \dots, y^{(n-1)}}$.

Будем далее считать, что $f\big(x,\, y(x),\, y'(x),\, \dots,\, y^{(n-1)}(x)\big) \in C(\tilde{\Omega})$.

Основной задачей теории ОДУ является
- отыскание ВСЕХ решений данного ДУ,
- изучение их свойств.

Определение. ***Общее решение*** ОДУ n-го порядка (1.1) - решение зависящее от n параметров (произвольных постоянных) $C_1, \dots, C_n$: $y = \varphi(x,\, C_1,\, \dots,\, C_n)$.
При этом

- любому набору постоянных соответствует решение и
- для любого решения существуют соответствующие постоянные $C_1^*, \dots, C_n^*$.

Определение. Каждое решение ОДУ, которое получается из общего решения $y=\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, если параметрам (произвольным постоянным) $C_1, \dots, C_n$ придать определенные значения, называют ***частным решением***.

Замечание 1.3. Не всегда решение ОДУ n-го порядка (1.1), зависящее от n постоянных является общим.

Пример 1.1. Так ОДУ $y = xy' + (y')^2$ имеет следующие решения[1]:

$y_1 = -\dfrac{x^2}{4}$ и

$y_2 = Cx + C^2$ - однопараметрическое семейство решений.

Однопараметрическое семейство решений не является общим решением, так как ни при каком значении постоянной C решение $y = -\dfrac{x^2}{4}$ из него получить не можем.

Общего решения нет.

Замечание 1.4. Не всегда решение ОДУ можно получить в явном виде.

Пример 1.3. Так решение ОДУ $3x(x+1)y' = (x+2)y$ имеет вид $(x+1)y^3 - Cx^2 = 0$.

В этом случае говорят, что ОДУ имеет решение в виде ***интеграла*** $\Phi(x, y, C)$.

Для ОДУ n-го порядка (1.1) или (1.2) интеграл $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n)$.

Интегральная кривая - интеграл.
Но не каждый интеграл - интегральная кривая.

Понятие ***общего интеграла*** вводится аналогично понятию общего решения. В примере 1.3 интеграл общий.

§2. ОДУ 1-го порядка.

ОДУ первого порядка в общем виде

$$F(x, y\ y') = 0. \qquad (2.1)$$

[1] Будет решена на лекции 6 (Пример 2.3.1.), а пока можно в этом убедиться непосредственной проверкой.

ОДУ в нормальной форме (форме Коши)

$$y'(x)=f(x,\, y). \tag{2.2}$$

При этом

$x\in I\subset \mathbb{R}_x^1$ - независимое переменное,

$I\in\{(a,\, b),\, (a,\, b],\, [a,\, b),\, [a,\, b]\}$,

$y=y(x): I\to D\subset \mathbb{R}_y^1 \qquad \forall x\in I, \qquad y(x)\in C^1(I)$,

$G=I\times D\subset \mathbb{R}_{x,\, y}^2$.

Т.е. I необходимо лежит в проекции G на $\mathbb{R}_x^1$.

Пример 2.1. Рассмотрим простейший случай: найти все решения ОДУ $y'=f(x)$, $x\in[a,\, b]$, $f(x)\in C([a,\, b])$.

☐ Все решения этого ОДУ описываются функцией[2]

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + C,\ x_0\in[a,\, b].$$

ОДУ имеет бесконечно много решений.

■

Процесс нахождения решения называется ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ОДУ.

ОДУ, интегрируемые при помощи конечного числа интегралов или других элементарных операций называются ИНТЕГРИРУЕМЫМИ В КВАДРАТУРАХ или в конечном виде.

В **примере 2.1** ОДУ интегрируемо в квадратурах.

Квадратура: латинское quadratura означает "придание квадратной формы".

Вычисление площади плоской фигуры или площади поверхности у греков сводилось к построению равновеликого квадрата - к квадратуре.

Квадратурой стали называть составление какого-либо интеграла.

Аналитическое определение интеграла появилось только в XIX веке: еще Фурье (1807) считал интеграл определенным с помощью понятия площади.

Поэтому любой интеграл представлял некоторую квадратуру.

Отсюда выражения: уравнение решается в квадратурах, задача сводится к квадратурам.

Замечание 2.1. Решение может быть определено на сколь угодно малом промежутке.

Замечание 2.2. Разные решения могут быть определены на разных промежутках.

Пример 2.2а. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y=\operatorname{tg}(x+C)$.[3]

---

[2] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.9, §9.1. Определение первообразной.
§14.4. Теорема 2 (теорема Барроу).

□ Дифференциальное уравнение однопараметрического семейства кривых получится, если исключить параметр C из системы

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg}(x + C), \\ y' = \dfrac{1}{\cos^2(x + C)}. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{1}{\cos^2(x + C)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x + C)$, то получаем $\underline{y' = 1 + y^2}$.

■

Пример 2.2б. Решить уравнение $y' = y^2 + 1$.

□ $y^2 + 1 \neq 0$, поэтому, разделив на $(y^2 + 1)$ ОДУ и умножив на dx, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx .$$

Интегрируя которое, получим

$$\operatorname{arctg} y = x + C$$

или

$$y = \operatorname{tg}(x + C).$$

При этом

$$(x + C) \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Т.е. $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k - C,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k - C \right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Получается, что при разных значениях параметра C решения определены на разных промежутках.

■

В ряде случаев ОДУ не имеет решения в квадратурах.

Так Лиувилль (1842 г.) доказал, что (специальное) уравнение Риккати

$$y' = y^2 + x^{\alpha}$$

разрешимо в квадратурах тогда и только тогда, когда $\alpha = \dfrac{-4n}{2n - 1}$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\alpha = -2$.

Любое решение - интеграл.

Существует понятие общего интеграла.

Множество значений параметра C, при которых решения ОДУ (2.2) лежат в D, обозначим $(C)_D$.

Высказывание "произвольная постоянная" означает, что $C \in (C)_D$.

---

[3] С§1.10.

Определение. Функцию $y(x)=\varphi(x,\,C)$, где C - параметр (так называемая произвольная постоянная) будем называть ***общим решением*** ОДУ (2.2), если

- $\forall C\in(C)_D\;\; y(x)=\varphi(x,\,C)$ есть решение ОДУ (2.2) и
- любое решение ОДУ (2.2) можно получить из него соответствующим выбором параметра C[4].

В рассмотренных выше примерах решения общие.

Определение. Каждое решение ОДУ (2.2), которое получается из общего решения $y(x)=\varphi(x,\,C)$, если постоянной C придать определенное постоянное значение из $(C)_D$, называют ***частным решением*** ОДУ (2.2) в D.

Определение. Соотношение

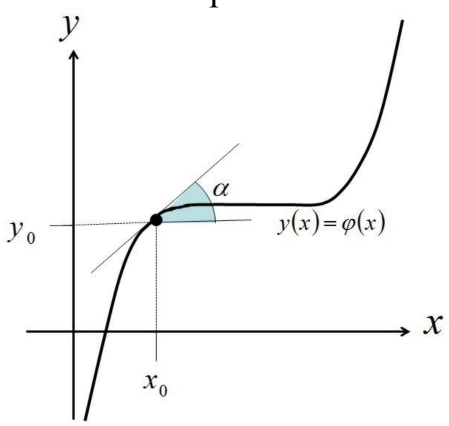
$$\Phi(x,\,y(x),\,C)=0$$

называют ***общим интеграло***м ОДУ (2.2) в области $G\subseteq\mathbb{R}^2_{x,y}$, если оно дает общее решение в области D путем разрешения его относительно y.

Если ОДУ не разрешимо в квадратурах, то применяют

- численные методы[5],
- метод изоклин.

Геометрический смысл ОДУ.



$y(x)=\varphi(x)$ - интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0,\,y_0)$ (постоянная C фиксирована, так как $y(x_0)=\varphi(x_0)=y_0$).

$f(x_0,\,y_0)=y'\big|_{(x_0,\,y_0)}=\operatorname{tg}\alpha$, где α - угол наклона касательной к кривой, проходящей через точку $(x_0,\,y_0)$.

Сопоставим каждой точке $(x_0,\,y_0)\in G$ отрезок прямой, проходящий через эту точку и коллинеарный вектору с координатами $\begin{pmatrix}1\\ f(x_0,\,y_0)\end{pmatrix}$.

Множество всех полученных отрезков называют ***полем направлений***, соответствующим ОДУ (2.2).

---

[4] Для любого решения ОДУ (2.2) $\exists C^*\in(C)_D:\; y(x)=\varphi(x,\,C^*)$ - решение ОДУ (2.2).

[5] В наш курс не входят - изучают в курсе вычислительной математики.

Т.О., ОДУ (2.2) определяет в области G ***поле направлений***: т.е. в каждой точке G ОДУ (2.2) определяет направление касательной к решению, проходящему через эту точку.

Замечание 2.3. Интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений.
Доказать самим, что всякая кривая, касающаяся в каждой своей точке направления, имеющегося в этой точке, является интегральной кривой.

Это поле можно изобразить наглядно, если в области G взять достаточно "густое" множество из конечного числа точек, и через каждую его точку $(x,\ y)$ провести короткий отрезок под углом α к оси Ox, где $\operatorname{tg}\alpha = f(x,\ y)$.

Проводя в области G кривые, идущие везде приблизительно по направлению ближайших отрезков, получаем представление о ходе решения данного ОДУ.

Определение. ***Изоклиной*** (линией равного наклона) ОДУ (2.2) называется геометрическое множество точек, где $f(x,\ y) = k$, $k = const$.

Метод изоклин является приближенным методом исследования поведения интегральных кривых ДУ.

Алгоритм решения (методом изоклин):

① Для нескольких k из множества значений функции $f(x,\ y)$, строим изоклины $f(x,\ y) = k$, стараясь не оставить на чертеже больших областей без изоклин, или хотя бы пометить, например, "здесь $y' > 2$".
В том числе и для $k = 0$ и $k = \infty$, если $f(x,\ y)$ принимает эти значения.

② Через многие точки каждой изоклины $f(x,\ y) = k$ проводим короткие отрезки под углом наклона α $(\operatorname{tg}\alpha = k)$ к оси Ox - строим поле направлений.

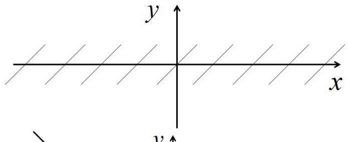
③ По этому полю направлений строим интегральные кривые.

Пример 2.3. С помощью изоклин начертить (приближенно) решения уравнения $(x - y)y' = x + y$.

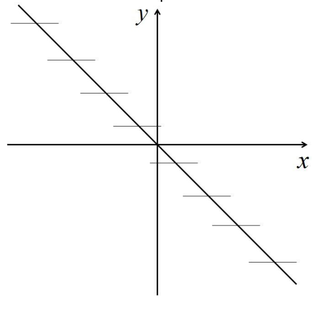
□ $y' = k$ → $(x - y)k = x + y$.

Т.о., изоклины - прямые $(k + 1)y = (k - 1)x$, проходящие через начало координат.

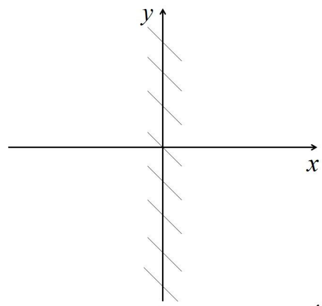
$k = 1$ → $y = 0$ - ось абсцисс



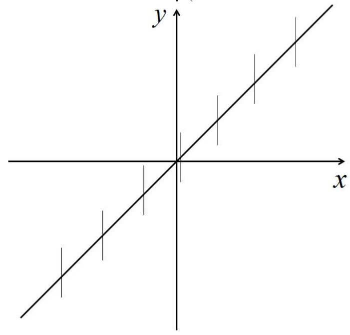
$k = 0$ → $y = -x$

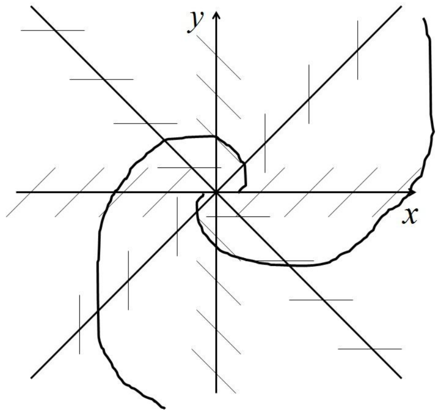


$k=-1 \rightarrow x=0$ - ось ординат



$y=\frac{k-1}{k+1}x \xrightarrow[k\to\infty]{} x$





■

Замечание 2.4. Если есть вертикальные отрезки - все несколько сложнее: полученную кривую графиком не назовешь.

Представляется разумным расширить понятие интегральной кривой.

Определение. Кривая $\gamma:\begin{cases} x=\psi(t), \\ y=\varphi(t), \end{cases}$ $t\in I_t$ называется ***интегральной кривой*** ОДУ (2.2), если $\forall t\in I_t$

1) точка $(\psi(t),\varphi(t))\in G$,

2) $\varphi(t)\in C^1(I_t)$, $\psi(t)\in C^1(I_t)$, $(\psi'(t))^2+(\varphi'(t))^2\neq 0$,

3) $\varphi'(t)-f(\psi(t),\varphi(t))\psi'(t)=0$.

Если $\gamma:\begin{cases} x=t, \\ y=\varphi(t), \end{cases}$ $t\in[t_1^*,t_2^*]$, то $y=\varphi(x)$ решение при $x\in[x_1^*,x_2^*]$, где $x_1^*=t_1^*$, $x_2^*=t_2^*$.

Если $\gamma:\begin{cases} x=\psi(t), \\ y=t, \end{cases}$ $t\in[\hat{t}_1,\, \hat{t}_2]$, то $x=\psi(y)$ решение при $y\in[\hat{y}_1,\, \hat{y}_2]$, где $\hat{y}_1=\hat{t}_1$, $\hat{y}_2=\hat{t}_2$.

Из рисунка в **примере 2.3** видно, что появилось целое семейство кривых.

Огюст Коши предложил для отделения определенного решения (кривой) от всей совокупности решений использовать начальные данные.

Задача построения решения с использованием начальных данных получила название ***задачи Коши***.

Можно дать две эквивалентные формулировки задачи Коши.

Формулировка ЗК1. Заданы числа x_0 и y_0 такие, что точка $(x_0,\, y_0)\in G$.
Найти $y=y(x)$ то решение ОДУ (2.2), для которого $y(x_0)=y_0$.

Формулировка ЗК2. В G задана точка.
Найти то решение ОДУ (2.2), график которого проходит через эту точку.

Замечание 2.5. На первых порах мы рассматриваем ОДУ первого порядка, и $y\in\mathbb{R}_y^1$.
В дальнейшем будем искать решение системы ОДУ в виде вектор-функции $\bar{y}(x)\in\mathbb{R}_{\bar{y}}^n$.

Возникают естественные вопросы:

А есть ли такие решения?

Если есть, то сколько их?

Оказывается, что если $f(x,\, y)\in C(G)$, то в некоторой окрестности точки $(x_0,\, y_0)\in G$ гарантировано существование решения, проходящего через нее.

А если еще $\dfrac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}\in C(G)$, то это решение единственное.

Это так называемая теорема существования и единственности решения задачи Коши, дающая <u>достаточные</u> условия существования и единственности решения.

Итак:

задача Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}y(x)=f(x,\, y), & (2.2) \\ y(x_0)=y_0. & (2.\text{НУ}) \end{cases}$$

Теорема 2.1 (существования и единственности)

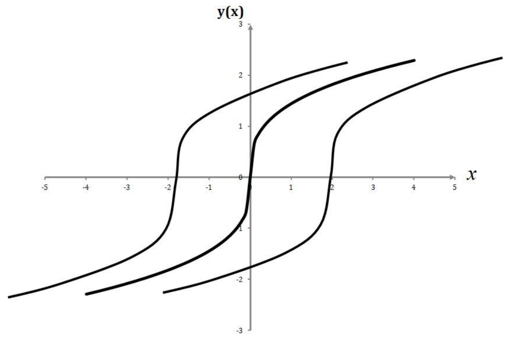
Если $f(x,\, y)\in C(G)$, $\dfrac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}\in C(G)$, область $G=I\times D\subset\mathbb{R}_{x,y}^2$,

то $\forall$ точки $(x_0,\, y_0)\in G$ $\exists U_\delta(x_0)\subset I$, в которой решение $\vec{y}(x): U_\delta(x_0) \to D \subset \mathbb{R}^1_y$ задачи Коши (2.2)-(2.НУ) существует и единственно.

Пример 2.4. Решить уравнение $y' = \dfrac{1}{y^2}$.

☐ $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$, $f_y = -\dfrac{2}{y^3}$.

В точках оси Ox: $(x_0, 0)$ функция $f(x, y)$ разрывна, но через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит единственная интегральная кривая $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$.



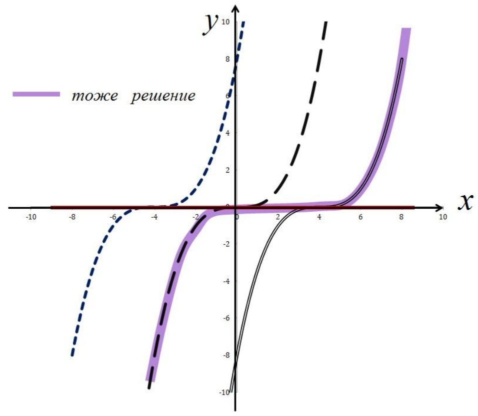
■

Пример 2.5. Решить уравнение $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$.

☐ $f = f(y) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ - непрерывна,

но $f_y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$.

$f(y) = 0$ → $y = 0$, что есть решение: в этом случае $y' = 0$.



$f(y) \neq 0$: $y = \dfrac{(x + C)^3}{8}$ - однопараметрическое семейство решений не всегда является общим (не всегда описывает все множество решений - ни при каком значении постоянной C мы не получим из него решение $y = 0$).

Решение существует в каждой точке $(x_0, 0)$ оси Ox, но единственность нарушена.

■

Замечание 2.6. Однопараметрическое семейство решений из **примера 2.5** $y = \dfrac{(x + C)^3}{8}$ является общим решением при $y > 0$ или $y < 0$, то есть в области, где выполнены все условия **теоремы 2.1** существования и единственности.

Замечание 2.7. Решение, в каждой точке которого нарушена единственность, называется ***особым***.
Подробнее остановимся на этом моменте позже лекции 6, 17).

Определение. Точка $(x^*, y^*) \in G$ называется ***точкой неединственности***, если некоторые два решения ОДУ, проходящие через нее,

- имеют общую касательную в этой точке,
- локально (вблизи x^*) различны (т.е. не являются локально совпадающими).

Замечание 2.8. Решения $y_1 = 0$ и $y_2 = \frac{x^3}{8}$ из **примера 2.5** оба проходят через точку $(0, 0)$, но при $x = \delta \neq 0$ по-прежнему $y_1 = 0$, а $y_2(\delta) = \frac{\delta^3}{8} \neq 0$, следовательно, уже $y_1(\delta) \neq y_2(\delta)$, т.е. локально не совпадают.

Определение. Решение ОДУ называется ***особым***, если каждая его точка является точкой неединственности.