Лекция 11.

Гл. III. Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

§1. Общая теория ЛСОДУ.

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \tag{1.5}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \ A = A_{n\times n} = \left(a_{jk}(x)\right), \ x \in I .$$

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x). \tag{1.5од}$$

Замечание 1.7. На языке линейной алгебры **теоремы 1.2** и **1.3** лекции 10 означают, что

- пространство решений (1.5од) n-мерно,
- базисом в нем служит любая ФСР (1.5од).

Теорема 1.4. (об общем решении неоднородной СЛОДУ).

Если $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ - ФСР (1.5од), а $\vec{y}^*(x)$ - частное решение (1.5), то любое решение (1.4) представимо в виде

$$\vec{y}(x) = \vec{y}^*(x) + Y(x)\vec{C},$$

где $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, $C_j = const$, $j = \overline{1, n}$.

○ $\vec{y}(x) - \vec{y}^*(x) = \vec{u}(x)$ есть решение (1.5од) по ПСЗ.

По **теореме 1.3** (лекция 10) $\vec{u}(x) = Y(x)\vec{C}$,

т.е. $\vec{y}(x) - \vec{y}^*(x) = Y(x)\vec{C}$, ч.т.д.

●

1.1. Метод исключения.

Идея: приведение нормальной СЛОДУ в форме Коши к одному ОДУ n-го порядка.

Замечание 1.1.1. Не всегда СЛОДУ приводится к одному ОДУ n-го порядка.

Пример 1.1.1. $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = u, \\ \dfrac{dv}{dx} = -v \end{cases}$ - пример СЛОДУ, распадающейся на $n = 2$ не связанных между собой ОДУ 1-го порядка.■

Замечание 1.1.2. Метод требует большей гладкости от коэффициентов и правых частей СЛОДУ:

$a_{ij}(x) \in C^{n-1}(I),\ i,\ j = \overline{1,\ n}$,

$f_i(x) \in C^{n-1}(I),\ i = \overline{1,\ n}$,

$y_i(x) \in C^{n}(I),\ i = \overline{1,\ n}$.

!!! Гладкость увеличилась на $(n-1)$!!!

Запишем (1.5) в развернутом виде

$$\begin{cases} y_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j(x) + f_i(x), \\ i = \overline{1,\ n}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Продифференцируем, например, 1-ое уравнение системы:

$$y_1'' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}'(x) y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x) y_j'(x) + f_1'(x)$$

и подставим в него $y_j'(x)$ из (1.4а):

$$y_1'' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}{}^{1}(x) y_j(x) + f_1^{1}(x),$$

где $a_{1j}{}^{1}(x) = a_{1j} \sum\limits_{l=1}^{n} a_{jl}(x) + \dfrac{d}{dx} a_{1j}$, $f_1^{1}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(x) f_j(x) + \dfrac{d}{dx} f_1(x)$.

Дифференцируя еще раз и снова подставляя $y_j'(x)$ из (1.4а), получим:

$$y_1''' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}{}^{2}(x) y_j(x) + f_1^{2}(x).$$

Продолжая процесс аналогичным образом, получим

$$y_1^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}{}^{n-1}(x) y_j(x) + f_1^{n-1}(x).$$

Разрешим (это не всегда возможно) первые $(n-1)$ уравнения относительно $y_2, \ldots, y_n$:

$$y_j = y_j\left(x,\ y_1(x),\ y_1'(x),\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x)\right),\ j = \overline{2,\ n}$$

и подставим в последнее из полученных (n-ое) уравнение:

$$y_1^{(n)}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)y_1^{(n-j)}(x)=F(x).$$

Решив это уравнение, найдем функцию $y_1(x)$ и все ее производные до $(n-1)$-ой включительно, т.е. найдем $y_2, \ldots, y_n$.

Пример 1. $\begin{cases} \dot{x}=-2x-y+37\sin t, \\ \dot{y}=-4x-5y. \end{cases}$

○ ① $\ddot{x}=-2\dot{x}-\dot{y}+37\cos t = -2(-2x-y+37\sin t)-(-4x-5y)+37\cos t =$ $= 8x+7y-74\sin t+37\cos t$

② $y=-\dot{x}-2x+37\sin t$

③ $\ddot{x}=8x+7(-\dot{x}-2x+37\sin t)-74\sin t+37\cos t$, откуда $\ddot{x}+7\dot{x}+6x=185\sin t+37\cos t$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+7\lambda+6=0$, т.е. $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-6$ и $x_{од}=C_1e^{-t}+C_2e^{-6t}$.

Частное решение будем искать в виде (нерезонансный случай) $x_ч = a\sin t+b\cos t$:

$-a\sin t-b\cos t+7a\cos t-7b\sin t+6a\sin t+6b\cos t=185\sin t+37\cos t$.

В силу линейной независимости функций $\sin t$ и $\cos t$ получаем систему $\begin{cases} -a-7b+6a=185, \\ -b+7a+6b=37 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5a-7b=185, \\ 7a+5b=37, \end{cases}$ решая которую, находим

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 185 & -7 \\ 37 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{25\cdot 37+7\cdot 37}{25+49}=\frac{32\cdot 37}{74}=16,\quad b=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 185 \\ 7 & 37 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{5\cdot 37-35\cdot 37}{25+49}=\frac{-30\cdot 37}{74}=-15.$$

Окончательно $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-6t}+16\sin t-15\cos t$, а $\dot{x}=-C_1e^{-t}-6C_2e^{-6t}+16\cos t+15\sin t$.

Теперь можем (см. ②) найти $y=-(-C_1e^{-t}-6C_2e^{-6t}+16\cos t+15\sin t)-2(C_1e^{-t}+C_2e^{-6t}+16\sin t-15\cos t)+37\sin t =$ $= -C_1e^{-t}+4C_2e^{-6t}-10\sin t+14\cos t$.

●

1.2 Метод вариации постоянных для СЛОДУ.

Допустим, что нашли ФСР (1.4од).

Если теперь найдем частное решение (1.5), то по **теореме 1.4** будем знать все решения.

Теорема 1.2.1. Если известна ФСР (1.5од), то решение неоднородной СЛОДУ (1.4) сводится к квадратурам.

○ $\vec{y}(x)=Y(x)\vec{C}$.

Пусть $\vec{C}=\vec{C}(x)$.

Тогда

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x)=\frac{d}{dx}\left(Y(x)\vec{C}(x)\right)=\left(\frac{d}{dx}Y(x)\right)\vec{C}(x)+Y(x)\frac{d}{dx}\vec{C}(x)=\underline{(AY(x))\vec{C}(x)}+Y(x)\frac{d}{dx}\vec{C}(x)=$$
$$=\underline{A(x)Y(x)\vec{C}}+\vec{f}(x),$$

откуда

$Y(x)\dfrac{d}{dx}\vec{C}(x)=\vec{f}(x)$ -

система линейных уравнений относительно $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$.

Эта система разрешима, так как $\det Y(x)=W(x)\neq 0$.

Следовательно,

$C_j'(x)=\varphi_j(x)$

и

$C_j(x)=\int \varphi_j(x)dx+d_j=\Phi_j(x)+d_j$.

Получаем общее решение (1.4)

$\vec{y}(x)=Y(x)\left(\vec{\Phi}(x)+\vec{d}\right)=\vec{y}^*(x)+Y(x)\vec{d}$,

где общее решение (1.4од)

$\vec{y}_{од}(x)=Y(x)\vec{d}$

и частное решение (1.4)

$\vec{y}^*(x)=\sum_{k=1}^{n}\vec{y}_k\Phi_k(x)$.

●

§2. ЛСОДУ с постоянными коэффициентами.

Здесь уже $A=A_{n\times n}=\left(a_{jk}\right),\ a_{jk}=const\in\mathbb{R},\ j,k=\overline{1,n}$.

Задача: найти ФСР.

Т.е. сначала решаем (1.5од)

Решение (1.5од) будем искать в виде $\vec{a}\cdot e^{\lambda x}$, где

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ - неизвестный постоянный столбец,

λ - неизвестное, вообще говоря, комплексное число $(\lambda\in\mathbb{C})$.

Из (1.5од)

$\lambda\vec{a}\cdot e^{\lambda x}=A\vec{a}\cdot e^{\lambda x}$,

т.о., вектор $\vec{a}$ должен быть решением уравнения

$$\left(A-\lambda E\right)\vec{a}=\vec{0}, \qquad (2.1)$$

т.е. собственным вектором матрицы A, чтобы получить нетривиальное решение (2.1).

Для этого надо потребовать, чтобы

$$\det\left(A-\lambda E\right)=0. \qquad (2.2)$$

Определение. (2.2) - характеристическое уравнение СЛОДУ (1.5од),

λ - собственное значение (число) матрицы A,

$\vec{a}\neq\vec{0}$ - собственный вектор матрицы A.

Т.о. доказана

Лемма 2.1. Если $\vec{h} \neq \vec{0}$ - собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ: $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$, то (1.5од) имеет решение $\vec{y}(x) = \vec{h} \cdot e^{\lambda x}$.

Начнем с более простого случая.

2.1. Случай простых корней характеристического $C_j\vec{h}_j \cdot e^{(\lambda_j - \lambda_n)x}$ уравнения.

Теорема 2.1.1. Если все корни характеристического уравнения (2.2) различны, а $\vec{h}_j,\ j = \overline{1, n}$, соответствующие им собственные векторы, то $\vec{y}_j(x) = \vec{h}_j \cdot e^{\lambda_j x},\ j = \overline{1, n}$, образуют ФСР.

○ Схема доказательства "от противного".

Допустим $\exists C_j = const,\ j = \overline{1, n}$: $\sum\limits_{j=1}^{n} (C_j)^2 \neq 0$, а $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\vec{h}_j \cdot e^{\lambda_j x} = \vec{0}$.

Пусть $C_1 \neq 0$ (всегда можно перенумеровать).

① $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\vec{h}_j \cdot e^{\lambda_j x}\right) \cdot e^{-\lambda_n x} = \vec{0}$ →

$$C_1\vec{h}_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \dots + C_{n-1}\vec{h}_{n-1} \cdot e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} + C_n\vec{h}_n = \vec{0}.$$

② Дифференцируем:

$$(\lambda_1 - \lambda_n)C_1\vec{h}_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)C_{n-1}\vec{h}_{n-1} \cdot e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} = \vec{0}.$$

③ Получившееся равенство домножаем на $e^{\left(\lambda_n - \lambda_{n-1}x\right)}$:

$$(\lambda_1 - \lambda_n)C_1\vec{h}_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + \dots + (\lambda_{n-2} - \lambda_n)C_{n-2}\vec{h}_{n-2} \cdot e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})x} + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)C_{n-1}\vec{h}_{n-1} = \vec{0}.$$

④ Снова дифференцируем:

$$(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})C_1\vec{h}_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + \dots + (\lambda_{n-2} - \lambda_n)(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})C_{n-2}\vec{h}_{n-2} \cdot e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})x} = \vec{0}.$$

Повторяя шаги ③-④, в конце концов получим

$$C_1\prod_{j=2}^{n}(\lambda_1 - \lambda_j)\vec{h}_1 = \vec{0},$$

так как $\lambda_1 \neq \lambda_j,\ j = \overline{2, n}$,

$C_1 \neq 0$ по предположению,

собственный вектор $\vec{h}_1 \neq \vec{0}$,

то полученное противоречие доказывает теорему.

●

Замечание 2.1.1. $a_{jk} = const \in \mathbb{R}$, но $\lambda \in \mathbb{C}$, и $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$: $h_j \in \mathbb{C},\ j = \overline{1, n}$.

Лемма 2.1.1. Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ($\lambda,\ \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$) - собственное значение (число) вещественной матрицы A, а $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1_1} \\ \vdots \\ u_{1_n} \end{pmatrix}$, $u_{1_j} \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$, - соответствующий ему собственный вектор матрицы A,

то $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \overline{\lambda_1}$ - также собственное значение (число) матрицы A,

а $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{2_1} \\ \vdots \\ u_{2_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u_{1_1}} \\ \vdots \\ \overline{u_{1_n}} \end{pmatrix}$ - соответствующий ему собственный вектор.

○ $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ - дано.

$\overline{A\vec{u}_1} = \overline{\lambda_1 \vec{u}_1}$ (см. Гл. II §3 лекции 8),

причем $\overline{A\vec{u}_1} = \overline{A}\,\overline{\vec{u}_1} = A\overline{\vec{u}_1}$,

а $\overline{\lambda_1 \vec{u}_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{\vec{u}_1} = \lambda_2 \overline{\vec{u}_1}$,

то $A\overline{\vec{u}_1} = \lambda_2 \overline{\vec{u}_1}$,

и $\overline{\vec{u}_1}$ - собственный вектор, соответствующий собственному значению (числу) λ_2.

●

Лемма 2.1.2. Общее решение системы (1.4од) с вещественной матрицей A можно выразить через вещественные функции.

○ Пусть $\vec{\tilde{y}}_1 = \vec{u}_1 e^{\lambda_1 x}$, $\vec{\tilde{y}}_2 = \vec{u}_2 e^{\lambda_2 x}$.

Возьмем $\vec{y}_1 = \dfrac{\vec{\tilde{y}}_1 + \vec{\tilde{y}}_2}{2}$, $\vec{y}_2 = \dfrac{\vec{\tilde{y}}_1 - \vec{\tilde{y}}_2}{2i}$.

По ПС1 $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ - решения (1.4од), вещественные по построению.

●