Лекция 12.

Гл. III. Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

§2. ЛСОДУ с постоянными коэффициентами.

2.2. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Если все собственные значения (числа) матрицы A различны, то существует базис из собственных векторов матрицы A:

$A\vec{h}_j = \lambda_j \vec{h}_j$, $\vec{h}_j \neq \vec{0}$,

$S = \begin{pmatrix} \vec{h}_1 & \cdots & \vec{h}_n \end{pmatrix}$ - матрица перехода,

$$AS = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \; S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Применим для

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A\vec{y}(x) \qquad (1.5\text{од})$$

замену $\vec{y}(x) = S\vec{z}(x)$:

$$S\frac{d}{dx}\vec{z}(x) = AS\vec{z}(x) \rightarrow \frac{d}{dx}\vec{z}(x) = S^{-1}AS\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\vec{z}(x),$$

откуда $\frac{d}{dx}z_k(x) = \lambda_k z_k(x)$, $\forall k = \overline{1,\, n}$,

и $z_k(x) = C_k e^{\lambda_k x}$, $\forall k = \overline{1,\, n}$, а $\vec{y}(x) = S\begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{h}_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}\vec{h}_n$ - решение получено.

Проблема заключается в следующем: если матрица A имеет кратные собственные значения, то ее не всегда можно привести к диагональному виду.

Пример 2.2.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□ Собственные значения (числа) матрицы A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Допустим, что матрицу A можно привести к диагональному виду.

Тогда $\exists S$: $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A = S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Полученное противоречие доказывает ошибочность нашего предположения.

■

Простейшая форма, к которой приводится ПРОИЗВОЛЬНАЯ квадратная матрица, есть так называемая ***жорданова нормальная форма***.

Определение Матрица вида $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ размера $q \times q$ называется ***жордановым блоком*** порядка q.

Эта матрица J_λ имеет единственное собственное значение (число), равное λ, (алгебраической) кратности q.

Найдем собственные векторы J_λ:

$$J_\lambda \vec{h} = \lambda \vec{h}, \ \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_q \end{pmatrix}.$$

Распишем покомпонентно:

$\lambda h_1 + h_2 = \lambda h_1 \rightarrow h_2 = 0$ и h_1 - любое,

$\lambda h_2 + h_3 = \lambda h_2 \rightarrow h_3 = 0$,

$\vdots$

$\lambda h_{q-1} + h_q = \lambda h_{q-1} \rightarrow h_q = 0$,

$\lambda h_q = \lambda h_q$.

Т.о., $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ - единственный[1] собственный вектор матрицы J_λ.

Обозначим $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i^{я}\ строка$, $\vec{e}_i$ – i-ый столбец единичной матрицы: $\vec{e}_i = \left(e_{i_k}\right)$,

где $e_{i_k} = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases}$

$\vec{h} = \vec{e}_1$, т.о., $\vec{h}$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_q$ - базис.

Посмотрим, как действует матрица J_λ на базисные векторы: $J_\lambda \vec{e}_i = ?$, $i = \overline{1, q}$.

[1] Геометрическая кратность (максимальное число линейно-независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению) $\lambda: \ s = 1$.

$$J_\lambda \vec{e}_1 = J_\lambda \vec{h} = \lambda \vec{h} = \lambda \vec{e}_1,$$

$$J_\lambda \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2,$$

$$\vdots$$

$$J_\lambda \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{c} -(k-1)^я \ \textit{строка} \\ -k^я \ \textit{строка} \end{array} \right| = \vec{e}_{k-1} + \lambda \vec{e}_k,$$

$$\vdots$$

$$J_\lambda \vec{e}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \vec{e}_{q-1} + \lambda \vec{e}_q.$$

Определение. Набор векторов $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_q\}$ называется ***жордановой цепочкой*** матрицы A, если

$$\begin{aligned} &A\vec{f}_1 = \lambda \vec{f}_1, \\ &A\vec{f}_2 = \lambda \vec{f}_2 + \vec{f}_1, \\ &\vdots \\ &A\vec{f}_q = \lambda \vec{f}_q + \vec{f}_{q-1}. \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

Вектор $\vec{f}_1$ - ***собственный вектор*** матрицы A,
векторы $\vec{f}_2, \dots, \vec{f}_q$ называются ***присоединенными***.

Лемма 2.2.1. Векторы жордановой цепочки образуют линейно-независимую систему.

○ Докажем по индукции:

1. $\underline{n=0}$ $C_1 \vec{f}_1 = \vec{0}$, $\vec{f}_1 \neq \vec{0}$ - собственный вектор, следовательно $C_1 = 0$.
2. $\underline{n = p < q-1}$ Пусть $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p$ - линейно независимы: $C_1 \vec{f}_1 + \dots + C_p \vec{f}_p = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{p} (C_j)^2 = 0$.
3. $\underline{n = p+1 < q}$ Покажем, что если $C_1 \vec{f}_1 + \dots + C_{p+1} \vec{f}_{p=1} = \vec{0}$, то $\sum\limits_{j=1}^{p+1} (C_j)^2 = 0$.

$\sum\limits_{j=1}^{p+1} C_j \vec{f}_j = \vec{0}$, тогда $\left(A-\lambda E\right)\sum\limits_{j=1}^{p+1} C_j \vec{f}_j = \vec{0}$, т.е. $\sum\limits_{j=1}^{p+1} C_j \left(A-\lambda E\right)\vec{f}_j = \vec{0}$.

Распишем подробнее

$C_j\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_1 + C_2\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_2 + \cdots + C_{p+1}\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_{p+1} = \vec{0}$.

Но $\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_1 = \vec{0}$, т.о., $C_2\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_2 + \cdots + C_{p+1}\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_{p+1} = \vec{0}$,

при этом $\left(A-\lambda E\right)\vec{f}_j = \vec{f}_{j-1}$, $\forall j = \overline{2,\ p+1}$,

т.е. $C_2\vec{f}_1 + \cdots + C_{p+1}\vec{f}_p = \vec{0}$.

Но по предположению индукции $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p$ - линейно независимы, поэтому $\sum\limits_{j=2}^{p+1}\left(C_j\right)^2 = 0$.

Остается $C_1\vec{f}_1 = \vec{0}$, но $\vec{f}_1 \neq \vec{0}$ - собственный вектор, следовательно $C_1 = 0$.

Ч.т.д.

●

Замечание 2.2.1. При построении жордановой цепочки собственные векторы определяются с точностью до произвольного постоянного множителя, а присоединенные векторы с точностью до произвольного решения однородной системы.

Замечание 2.2.2. При практическом построении жордановой цепочки могут возникнуть трудности, если λ кратности $m > 2$ (m - алгебраическая кратность) соответствуют $1 < k < m$ независимых собственных векторов (k - геометрическая кратность). См. пример 2.2.3 далее.

Замечание 2.2.3. Число подблоков жорданова блока, отвечающих одному собственному значению равно числу линейно-независимых собственных векторов, отвечающих этому собственному значению (геометрической кратности):

$$m = 4, \quad k = 1: \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$k = 2: \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$k = 3: \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2.1. (Жордана).

Для произвольной квадратной матрицы $A = A_{n\times n}$, у которой λ_l, $l = \overline{1,\ K}$ собственные значения (числа) кратности m_l, $1 \le m_l \le n$, $\sum\limits_{l=1}^{k} m_l = n$, существует базис, состоящий из ее жордановых цепочек

$\left\{\vec{f}_{j1}, \vec{f}_{j2}, \dots, \vec{f}_{jq_j}\right\}$, $j = \overline{1,\ p}$, $p \ge K$, $q_j \le m_l$, $\sum\limits_{j=1}^{p} q_j = n$, сумма q_j, отвечающих $\lambda_j = \lambda_l$ равна m_l.

Без доказательства: см. 🕮 Петровский. Лекции по теории ОДУ.
🕮 Понтрягин. ОДУ.
🕮 Ильин, Поздняк. Линейная алгебра.

Определение. ***Жорданова базисом*** $\mathbb{R}^n$ будем называть базис, составленный из жордановых цепочек.

В жордановом базисе матрица имеет вид $S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & & & 0 \\ & \boxed{J_{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{\lambda_p}} \end{pmatrix}$

Замечание 2.2.4. Различные индексы могут соответствовать одному и тому же λ (см. замечание 2.2.3 к лемме 2.2.1).

Если матрица перехода $S = \left(\vec{f}_{11} \cdots \vec{f}_{1q_1} \cdots \vec{f}_{p1} \cdots \vec{f}_{pq_p}\right)$, то (1.5од) после замены $\vec{y}(x) = S\vec{z}(x)$ принимает вид

$$\frac{d}{dx}\vec{z} = J\vec{z}. \tag{2.2.2}$$

Причем (2.2.2) распадается на p подсистем

$$\frac{d}{dx}\vec{z}_l = J_{\lambda_l}\vec{z}_l,\ l = \overline{1,\ p}, \tag{2.2.3}$$

где $\vec{z}_l$ - вектор-столбцы высоты q_l: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{l_1} \\ \vdots \\ z_{l_{q_l}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} \sum\limits_{k=1}^{l-1} q_k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} q_l \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} \sum\limits_{k=l+1}^{p} q_k \end{matrix}$.

При этом векторы каждой жордановой цепочки $\left\{\vec{f}_{l1}, \vec{f}_{l2}, \dots, \vec{f}_{lq_l}\right\}$, $l = \overline{1,\ p}$, $\sum\limits_{l=1}^{p} q_l = n$ образуют инвариантное линейное подпространство L_l:

$A\vec{f}_{l1} = \lambda_l \vec{f}_{l1}$,

$A\vec{f}_{li} = \lambda_l \vec{f}_{li} + \vec{f}_{li-1}$, $i = \overline{2,\ q_l}$.

$$A\sum_{i=1}^{q_j} C_i \vec{f}_{li} = \sum_{i=1}^{q_j} C_i A\vec{f}_{li} \in L_l.$$

Итак, рассмотрим систему q уравнений (для краткости записи индекс l здесь опускаем)

$$\frac{d}{dx}\vec{z} = J_\lambda \vec{z}. \qquad (2.2.3')$$

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$ - жорданов блок размера $q \times q$.

В покомпонентной записи (2.2.3') имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} z_1 = \lambda z_1 + z_2, \\ \dfrac{d}{dx} z_2 = \lambda z_2 + z_3, \\ \vdots \\ \dfrac{d}{dx} z_q = \lambda z_q. \end{cases} \qquad (2.2.3'')$$

Решаем систему (2.2.3'') снизу вверх.

$*$ $\dfrac{d}{dx} z_q = \lambda z_q \rightarrow z_q = C_q e^{\lambda x}$,

$**$ $\dfrac{d}{dx} z_{q-1} = \lambda z_{q-1} + z_q = \lambda z_{q-1} + C_q e^{\lambda x}$ (!!! резонанс!!!)

$z_{q-1} = C_{q-1} e^{\lambda x} + a x^1 e^{\lambda x}$[2]

$a: \left(axe^{\lambda x}\right)' = \lambda axe^{\lambda x} + C_q e^{\lambda x}$ или $ae^{\lambda x} + \underline{ax\lambda e^{\lambda x}} = \underline{\lambda axe^{\lambda x}} + C_q e^{\lambda x} \rightarrow a = C_q$

и $z_{q-1} = C_{q-1} e^{\lambda x} + C_q x e^{\lambda x}$

$***$ $\dfrac{d}{dx} z_{q-2} = \lambda z_{q-2} + z_{q-1} = \lambda z_{q-2} + C_{q-1} e^{\lambda x} + C_q x e^{\lambda x}$,

$z_{q-2} = C_{q-2} e^{\lambda x} + (ax + b) x^1 e^{\lambda x}$,

$2ax + b = C_{q-1} + C_q x \rightarrow a = \dfrac{C_q}{2}$, $b = C_{q-1}$

и $z_{q-2} = C_{q-2} e^{\lambda x} + C_{q-1} x e^{\lambda x} + \dfrac{1}{2} C_q x^2 e^{\lambda x}$.

$\vdots$

$$z_1 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \frac{1}{2} C_3 x^2 e^{\lambda x} + \cdots + \frac{1}{(q-1)!} C_q x^{q-1} e^{\lambda x}.$$

---

[2] $axe^{\lambda x}$ - секулярное (вековое) слагаемое - частное решение неоднородного уравнения

В векторной форме получаем

$$\vec{z} = e^{\lambda x}\left[\begin{array}{l}\vec{e}_1\left(C_1 + C_2 x + C_3\dfrac{x^2}{2} + \ldots + C_q\dfrac{x^{q-1}}{(q-1)!}\right) + \vec{e}_2\left(C_2 + C_3 x + C_4\dfrac{x^2}{2} + \ldots + C_q\dfrac{x^{q-2}}{(q-2)!}\right) + \\ + \ldots + \vec{e}_{q-1}\left(C_{q-1} + C_q x\right) + \vec{e}_q C_q\end{array}\right] =$$

$$= e^{\lambda x}\left[\begin{array}{l}C_1\vec{e}_1 + C_2\left(x\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + C_3\left(\dfrac{x^2}{2}\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) + \ldots + \\ + C_q\left(\dfrac{x^{q-1}}{(q-1)!}\vec{e}_1 + \ldots + x\vec{e}_{q-1} + \vec{e}_q\right)\end{array}\right] =$$

$$= e^{\lambda x}\left[\vec{\zeta}_1 C_1 + \vec{\zeta}_2 C_2 + \ldots + \vec{\zeta}_q C_q\right],$$

где $\vec{\zeta}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{\zeta}_2 = x\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, ... , $\vec{\zeta}_q = \dfrac{x^{q-1}}{(q-1)!}\vec{e}_1 + \ldots + x\vec{e}_{q-1} + \vec{e}_q$.

Возвращаясь в исходный базис, получим

$$\vec{u}_1 = S\vec{\zeta}_1 = S\vec{e}_1 = \vec{f}_1,$$

$$\vdots$$

$$\vec{u}_q = S\vec{\zeta}_q = \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}\vec{f}_1 + \ldots + x\vec{f}_{q-1} + \vec{f}_q.$$

А $\vec{y} = e^{\lambda x}\sum\limits_{m=1}^{q} C_m\vec{u}_m$.

Т.о., имеет место

Теорема 2.2.2. Каждому λ_l - собственному значению (числу) матрицы A кратности m_l отвечает $q_l \le m_l$ решений вида

$$\vec{y}_{l1} = e^{\lambda_l x}\vec{f}_{l1},$$

$$\vec{y}_{l2} = e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{l2} + x\vec{f}_{l1}\right),$$

$$\vdots$$

$$\vec{y}_{lq_l} = e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lq_l} + x\vec{f}_{lq_l-1} + \cdots + \frac{x^{q_l-1}}{(q_l-1)!}\vec{f}_{l1}\right).$$

Замечание 2.2.5. Доказать теорему можно непосредственной проверкой ее утверждения.

○ $\vec{y}_{lj} = e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lj} + x\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \dfrac{x^{j-1}}{(j-1)!}\vec{f}_{l1}\right)$, $j = \overline{1, q_l}$.

$$\left(A - E\frac{d}{dx}\right)\vec{y}_{lj} = A\vec{y}_{lj} - E\frac{d\vec{y}_{lj}}{dx} =$$

$$Ae^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lj} + x\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\vec{f}_{l1}\right) -$$

$$-\lambda_l e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lj} + x\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\vec{f}_{l1}\right) - e^{\lambda_l x}E\frac{d}{dx}\left(\vec{f}_{lj} + x\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\vec{f}_{l1}\right) =$$

$$= e^{\lambda_l x}\left((A-\lambda_l E)\vec{f}_{lj} + x(A-\lambda_l E)\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \frac{x^{j-2}(A-\lambda_l E)\vec{f}_{l2}}{(j-2)!} + \frac{x^{j-1}(A-\lambda_l E)\vec{f}_{l1}}{(j-1)!} \right) -$$

$$- e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!}\vec{f}_{l1} \right) =$$

$$= e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lj-1} + x\vec{f}_{j-2} + \cdots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!}\vec{f}_{l1} \right) - e^{\lambda_l x}\left(\vec{f}_{lj-1} + \cdots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!}\vec{f}_{l1} \right) = 0$$

●

Теорема 2.2.3. Решения (1.5од) $\vec{y}_{11}, \dots, \vec{y}_{1q_1}, \vec{y}_{21}, \dots, \vec{y}_{2q_2}, \dots, \vec{y}_{p1}, \dots, \vec{y}_{pq_p}, \sum_{l=1}^{p} q_l = n$,

| образуют ФСР.

○ Действительно,

$\vec{y}_{l1}(0) = \vec{f}_{l1}$, $l = \overline{1, p}$,

$\vdots$

$\vec{y}_{lq_l}(0) = \vec{f}_{lq_l}$.

По **лемме 2.2.1** при фиксированном l векторы $\vec{f}_{lj}$, $j = \overline{1, q_l}$ линейно независимы. $\vec{f}_{lj}$, $l = \overline{1, p}$ линейно независимы, как принадлежащие различным инвариантным подпространствам L_l.

Следовательно, $W(0) \neq 0$.

По следствию **леммы 1.2** (альтернативы) лекции 10 $W(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, т.е. $\vec{y}_{lj}$ линейно независимы.

●

Замечание 2.2.6. На практике порой проще, зная кратность λ_l - собственного значения матрицы A, т.е. m_l, искать соответствующее ему решение в виде:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_{11} + C_{21}x + \cdots + C_{m_l 1}x^{m_l - 1} \\ \vdots \\ C_{1n} + C_{2n}x + \cdots + C_{m_l n}x^{m_l - 1} \end{pmatrix} e^{\lambda_l x}.$$

!!! C_{ij} НЕ НЕЗАВИСИМЫ !!!

Пример 2.2.1. Найти все действительные решения системы $\begin{cases} \dot{x} &=& 5x - y - 4z \\ \dot{y} &=& -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} &=& 10x - 3y - 9z \end{cases}$,

$(\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 1)$.

① Система линейная однородная с постоянными коэффициентами.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$.

1. Не все корни характеристического уравнения $\det|A-\lambda E|=0$ различны, следовательно, либо а) если существует базис из собственных векторов матрицы A системы, находим его, либо б) строим жорданову цепочку для матрицы A системы. (В данном случае, поскольку λ - двукратный корень, такая цепочка будет всего лишь одна.)

При $\lambda_1=-1$ решаем систему $(A-\lambda_1 E)\vec{h}_1=\vec{0}$.

Для краткости записи используются следующие обозначения: выражение $\alpha(n)+\beta(m)$ над стрелочкой означает, что перешли к эквивалентной системе алгебраических уравнений, n-я строка матрицы которой представляет собой линейную комбинацию n-й и m-й строк с коэффициентами α и β соответственно.

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}6&-1&-4\\-12&6&12\\10&-3&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{\frac{1}{6}(2)}\begin{pmatrix}6&-1&-4\\-2&1&2\\4&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)+2(2)]{(1)+2(2)}\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1)}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}(2)]{(1)-\frac{1}{2}(2)}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}(1)}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\text{ дает }\vec{h}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}\text{ или }\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\text{ и}$$

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}e^{-t}$$

При $\lambda_{2,3}=1$ решаем ситему $(A-\lambda_2 E)\vec{h}_2=\vec{0}$.

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}4&-1&-4\\-12&4&12\\10&-3&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}(2)}\begin{pmatrix}4&-1&-4\\-3&1&3\\10&-3&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)+(2)}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+3(1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{ дает }\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ и }\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t}.$$

Поскольку для корня характеристического уравнения λ_2 кратности 2 (алгебраическя кратность равна 2) максимальное число линейно независимых собственных векторов равно 1 (геометрическая кратность равна 1), и 1 < 2, то строим для этого корня жорданову цепочку.

$$(A-\lambda_2 E)\vec{h}_3=\vec{h}_2\quad\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&-4&1\\-12&4&12&0\\10&-3&10&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{4}(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&-4&1\\-3&1&3&0\\10&-3&10&1\end{array}\right)\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)+(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\-3&1&3&0\\1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&0&3\\0&0&0&0\end{array}\right),\text{ дает }\vec{h}_3=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\text{ или (при }\alpha=0\text{) }\vec{h}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Жорданов базис будет состоять из

- собственного вектора $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = -1$,
- собственного вектора $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному значению $\lambda_2 = 1$,
- и присоединенного вектора $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \left\{ C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$ ❶

Пример 2.2.2. Найти все действительные решения системы $\begin{cases} \dot{x} & = & 7x + y + 2z \\ \dot{y} & = & 2x + 3y + z \\ \dot{z} & = & -8x - 2y - z \end{cases}$,

$(\lambda_{1,2,3} = 3)$.

② Система однородная.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -8 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Отметим, что все корни характеристического уравнения $\det|A - \lambda E| = 0$ равны: алгебраическя кратность λ равна 3.

Решаем систему $(A - \lambda E)\vec{h}_1 = \vec{0}$

$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, дает $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Поскольку для корня λ кратности 3 максимальное число линейно независимых собственных векторов равно 1 (геометрическая кратность равна 1), и 1 < 3, то строим для этого корня жорданову цепочку.

Для этого решаем систему $(A - \lambda E)\vec{h}_2 = \vec{h}_1$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, дает $\vec{h}_2 = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ или (при $\alpha = 0$) $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A - \lambda E)\vec{h}_3 = \vec{h}_2$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & \vline & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \vline & 1 \\ -8 & -2 & -4 & \vline & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \vline & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vline & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_2 = \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или (при } \beta = 1\text{) } \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Жорданов базис будет состоять из

- собственного вектора $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$,
- присоединенного к нему вектора $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- и еще одного присоединенного вектора $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + + C_3 e^{3t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$ ❷

Пример 2.2.3. Найти все действительные решения системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x + 4y \\ \dot{z} = -2x + y + 2z \end{cases}$,

$(\lambda_{1,2,3} = 2)$.

③ Система однородная.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Отметим, что все корни характеристического уравнения $\det|A - \lambda E| = 0$ равны: алгебраическя кратность λ равна 3.

Решаем систему $(A - \lambda E)\vec{h}_1 = \vec{0}$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Все собственные векторы имеют вид $\vec{h} = C_1\vec{h}_1 + C_2\vec{h}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Поскольку для корня λ кратности 3 максимальное число линейно независимых собственных векторов равно 2 (геометрическая кратность равна 2), и 2 < 3, то строим для этого корня жорданову цепочку. Для этого надо найти один присоединенный вектор.

Для этого решаем систему $(A-\lambda E)\vec{h}_3=\vec{h}$: $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\vec{h}_3=\begin{pmatrix}C_1\\ 2C_1\\ C_2\end{pmatrix}$. Система будет совместна, если $Rg\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & C_1\\ -4 & 2 & 0 & 2C_1\\ -2 & 1 & 0 & C_2\end{pmatrix}$ (теорема Кронекера-Капелли). Таким образом, $C_2=C_1$.

Пусть $C_1=C_2=1$.

$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 0 & C_1\\ -4 & 2 & 0 & 2C_1\\ -2 & 1 & 0 & C_1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{C_1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, дает $\vec{h}_3=\alpha\begin{pmatrix}C_1\\ 2C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{C_1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ или (при $\alpha=0$ и $C_1=-2$) $\vec{h}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Жорданов базис будет состоять из

- собственного вектора $\vec{H}_1=\begin{pmatrix}-2\\ -4\\ -2\end{pmatrix}$,
- присоединенного к нему вектора $\vec{H}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,
- и еще одного собственного вектора, линейно незвисимого с $\vec{H}_1$, например, $\vec{H}_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

3. Общее решение

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}-2\\ -4\\ -2\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-2\\ -4\\ -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right]+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$ ❸

2.3. Неоднородные СЛОДУ с ПостК.

Неоднородная СЛОДУ в форме Коши с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x) \qquad (1.5)$$

Для ее решения можно использовать

1. Метод вариации постоянных (Теорема 1.4 лекции 11)
2. Метод неопределенных коэффициентов (метод подбора - возможен, если вектор функция $\vec{f}(x)$ имеет специальный вид).

Определение. ***Векторным полиномом*** степени m назовем вектор-функцию

$$\vec{P}_m(x) = \begin{pmatrix} P_{1_m}(x) \\ \vdots \\ P_{n_m}(x) \end{pmatrix},$$

где $P_{j_m}(x)$, $j = \overline{1, n}$ - полином степени не выше m, но $\exists j^*$: $P_{j^*_m}(x)$ - полином степени m.

Замечание 2.3.1. По сути дела $\vec{P}_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \vec{a}_k x^k$, где $\vec{a}_m \neq \vec{0}$.

Определение. ***Векторным квазиполиномом*** назовем вектор-функцию

$\vec{f}(x) = e^{\mu x}\vec{P}_m(x)$,

где $\mu = const \in \mathbb{C}$, $\vec{P}_m(x)$ - векторный полином степени m.