Гл. III. Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

2.3. Неоднородные СЛОДУ с ПостК. (продолжение)

Неоднородная СЛОДУ в форме Коши с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x)=A\vec{y}(x)+\vec{f}(x) \qquad (1.5)$$

Теорема 2.3.1. Пусть в (1.5) $\vec{f}(x)$ - векторный квазиполином:

$\vec{f}(x)=e^{\mu x}\vec{P}_m(x)$.

Тогда (1.5) имеет частное решение

$\vec{y}(x)=e^{\mu x}\vec{Q}_M(x)$,

где $\vec{Q}_M(x)$ - векторный полином степени $M=m+s$, где s - наибольшая длина жордановой цепочки матрицы A, соответствующей собственному значению (числу) $\lambda=\mu$.

○Пусть жорданов базис A состоит из p цепочек $\left\{\vec{f}_{l1},\vec{f}_{l2},\ldots,\vec{f}_{lq_l}\right\}$, $l=\overline{1,p}$, $\sum\limits_{l=1}^{p}q_l=n$.

(**!!!** среди λ_l могут быть одинаковые **!!!**)

Разложим $\vec{P}_m(x)$ по этому базису:

$$\vec{P}_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\vec{a}_k x^k,$$

$$\vec{a}_k=\sum_{l=1}^{p}\left(\alpha_{l1}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{l1}+\alpha_{l2}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{l2}+\ldots+\alpha_{lq_l}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{lq_l}\right)=\sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{q_l}\alpha_{lj}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{lj},$$

$$\vec{P}_m(x)=\sum_{k=0}^{m}x^k\sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{q_l}\alpha_{lj}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\left[\sum_{k=0}^{m}x^k\sum_{j=1}^{q_l}\alpha_{lj}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{lj}\right].$$

По **ПС1** для СЛОДУ $\vec{y}(x)=\sum\limits_{l=1}^{p}\vec{y}_l(x)$, где

$$\frac{d}{dx}\vec{y}_l(x)=A\vec{y}_l(x)+e^{\mu x}\sum_{k=0}^{m}x^k\sum_{j=1}^{q_l}\alpha_{lj}^{\langle k\rangle}\vec{f}_{lj}=A\vec{y}_l(x)+e^{\mu x}\sum_{j=1}^{q_l}g_j(x)\vec{f}_{lj},$$

где $g_j(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}x^k\alpha_{lj}^{\langle k\rangle}$ - полином степени не выше m.

$\vec{y}_l(x)$ будем искать в виде $\vec{y}_l(x)=\sum\limits_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)\vec{f}_{lj}$, где $\varphi_j(x)$ - какая-то функция.

Подставляем в (1.5):

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)\vec{f}_{lj}=A\sum_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)\vec{f}_{lj}+e^{\mu x}\sum_{j=1}^{q_l}g_j(x)\vec{f}_{lj}.$$

Поскольку $\left\{\vec{f}_{l1},\vec{f}_{l2},\ldots,\vec{f}_{lq_l}\right\}$ - жорданова цепочка, то

$A\vec{f}_{l1}=\lambda_l\vec{f}_{l1}$, $A\vec{f}_{lj}=\lambda_l\vec{f}_{lj}+\vec{f}_{lj-1}$, $j=\overline{2,q_l}$

и

$$A\sum_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)\vec f_{lj} = \sum_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)A\vec f_{lj} = \varphi_1(x)\lambda_l\vec f_{l1} + \sum_{j=2}^{q_l}\varphi_j(x)\left(\lambda_l\vec f_{lj} + \vec f_{lj-1}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)\lambda_l\vec f_{lj} + \sum_{j=2}^{q_l}\varphi_j(x)\vec f_{lj-1} = \sum_{j=1}^{q_l}\varphi_j(x)\lambda_l\vec f_{lj} + \sum_{j=1}^{q_l-1}\varphi_{j+1}(x)\vec f_{lj} =$$
$$= \sum_{j=1}^{q_l-1}\left(\varphi_j(x)\lambda_l + \varphi_{j+1}(x)\right)\vec f_{lj} + \varphi_{q_l}(x)\lambda_l\vec f_{lq_l}.$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\varphi_1(x) = \lambda_l\varphi_1 + \varphi_2 + g_1(x)e^{\mu x}, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{d}{dx}\varphi_j(x) = \lambda_l\varphi_j + \varphi_{j+1} + g_j(x)e^{\mu x}, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{d}{dx}\varphi_{q_l}(x) = \lambda_l\varphi_{q_l} + g_{q_l}(x)e^{\mu x}. \end{cases}$$

$\varphi_j^{\,од}(x) = C_j e^{\lambda_l x}$, $\varphi_{j+1}(x)$ - знаем, если решать снизу вверх, т.о., это правая часть ДУ для $\varphi_j(x)$.

Метод вариации постоянных: $\varphi_j(x) = C_j(x)e^{\lambda_l x}$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}C_j(x) = C_{j+1}(x) + g_j(x)e^{(\mu-\lambda_l)x}, \ j = \overline{1, (q_l - 1)}, \\ \dfrac{d}{dx}C_{q_l}(x) = g_{q_l}(x)e^{(\mu-\lambda_l)x}. \end{cases}$$

Из этой системы последовательно находим $C_{q_l}(x)$, $C_{q_l-1}(x)$, ... , $C_1(x)$.

Возможны два случая:

① $\underline{\mu \ne \lambda_l}$, $l = \overline{1, p}$.

$$C_{q_l}(x) = \int g_{q_l}(x)e^{(\mu-\lambda_l)x}dx = \left|\begin{matrix} по \\ частям \end{matrix}\right| = g_{q_l}(x)\frac{e^{(\mu-\lambda_l)x}}{\mu-\lambda_l} - \frac{1}{\mu-\lambda_l}\int g'_{q_l}(x)e^{(\mu-\lambda_l)x}dx =$$
$$= \left|\begin{matrix} g_{q_l}(x) - полином\ степени\ не\ выше\ m \\ g'_{q_l}(x) - полином\ степени\ не\ выше\ (m-1) \end{matrix}\right| = \ldots = h_{q_l}(x)e^{(\mu-\lambda_l)x},$$

$h_{q_l}(x)$ - полином той же степени (не выше), чем $g_{q_l}(x)$, т.е. не выше m.

Так как ищем частное решение, то постоянную интегрирования положим равной нулю.

Аналогично находим все $C_{q_l-1}(x)$, ... , $C_1(x)$.

Получаем $C_j(x) = h_j(x)e^{(\mu-\lambda_l)x}$, где $h_j(x)$ - полином степени не выше m.

И $\varphi_j(x) = h_j(x)e^{\mu x}$.

② $\underline{\mu = \lambda_l}$ кратности $q_l \le k_l$ - кратности корня характеристического уравнения (2.1) (Лекция 11).

Тогда $e^{(\mu-\lambda_l)x} = 1$ и $C_{q_l}(x) = \int g_{q_l}(x)dx = z_{q_l}(x)$, где $g_{q_l}(x) = P_m(x)$, а $z_{q_l}(x) = P_{m+1}(x)$.

$C_{q_l-1}(x) = \int \left(g_{q_l-1}(x) + z_{q_l}(x)\right)dx = z_{q_l-1}(x)$, где $g_{q_l-1}(x) = P_m(x)$, $z_{q_l}(x) = P_{m+1}(x)$, т.е. $g_{q_l-1}(x) + z_{q_l}(x) = P_{m+1}(x)$, и $z_{q_l-1}(x) = P_{m+2}(x)$.

Получаем $C_j(x) = z_j(x) = P_{m+q_l-j+1}$.

И $C_1(x) = \int \left(g_1(x) + z_2(x)\right)dx = z_1(x)$, где $g_1(x) = P_m(x)$, $z_2(x) = P_{m+q_l-1}(x)$, т.е. $g_1(x) + z_2(x) = P_{m+q_l-1}(x)$, и $z_1(x) = P_{m+q_l}(x)$.

Просуммировав частные решения, соответствующие всем жордановым цепочкам, получим утверждение теоремы.

●

Замечание 2.3.2. Если $\vec{f}(x) = \cos(\mu x)\vec{P}_m(x)$, то учитывая, что $\cos(\mu x) = \dfrac{e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}}{2}$ и $\sin(\mu x) = \dfrac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i}$, а также ПС2 (Лекция 11), частное решение (1.5)

1. $\vec{y}(x) = \vec{Q}_M(x)\cos\mu x + \vec{L}_M(x)\sin\mu x$ или
2. $\vec{y}(x) = \operatorname{Re}\vec{C}_M(x)e^{i\mu x}$.

Аналогично для случая $\vec{f}(x) = \sin(\mu x)\vec{P}_m(x)$:

1. $\vec{y}(x) = \vec{Q}_M(x)\cos\mu x + \vec{L}_M(x)\sin\mu x$ или
2. $\vec{y}(x) = \operatorname{Im}\vec{C}_M(x)e^{i\mu x}$.

Гл. IV. Матричная экспонента.

§1. Понятие матричной экспоненты.

e^{Ax}, где A - матрица.

Задача Коши: $\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A\vec{y}(x),\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0$.

Решение будем искать в виде степенного ряда (с учетом НУ):

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{y}_n x^n .$$

Из ДУ получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\vec{y}_n x^{n-1} = A\vec{y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A\vec{y}_n x^n .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, последовательно получаем:

$\vec{y}_1 = A\vec{y}_0$,

$2\vec{y}_2 = A\vec{y}_1$,

...

$k\vec{y}_k = A\vec{y}_{k-1}$,

...

По индукции вычисляем

$$\vec{y}_k = \frac{A^k}{k!}\vec{y}_0$$

и

$$\vec{y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!}\vec{y}_0 .$$

Теперь вспомним $e^{ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!}$ и сформулируем

Определение. Экспонентой e^A матрицы A называется функция

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} . \tag{1.1}$$

§2. О сходимости ряда (1.1).

Определение Матрица $A=\left(a_{kj}\right),\ k,\ j=\overline{1,\,n}$, называется пределом последовательности матриц $A^{\langle p\rangle}=\left(a^{\langle p\rangle}{}_{kj}\right)$, если $\lim\limits_{p\to\infty} a^{\langle p\rangle}{}_{kj}=a_{kj}\quad \forall k,\ j=\overline{1,\,n}$.

$\sum\limits_{p=1}^{\infty} A^{\langle p\rangle}$ - матричный ряд.

$S_m=\sum\limits_{p=1}^{m} A^{\langle p\rangle}$ - частичная сумма матричного ряда.

Определение. Матричного ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} A^{\langle p\rangle}$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм $S_m=\sum\limits_{p=1}^{m} A^{\langle p\rangle}$.

Матрица $S=\lim\limits_{m\to\infty} S_m$ называется суммой матричного ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty} A^{\langle p\rangle}$:

$S=\sum\limits_{p=1}^{\infty} A^{\langle p\rangle}$.

$\|A\|$ - норма матрицы $A=\left(a_{kj}\right),\ k,\ j=\overline{1,\,n}$.

Говорят, что норма матрицы A ***согласована*** с нормой вектора $\vec{y}$, если выполнено условие $\|A\vec{y}\|\le\|A\|\,\|\vec{y}\|$.

Норму матрицы $\|A\|=\sup\limits_{\|\vec{y}\|\ne 0}\dfrac{\|A\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|}$ называют ***подчиненной*** норме вектора.

Примеры матричных норм.

① Кубическая норма матрицы $\|A\|_1=\max\limits_{1\le k\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{kj}\right|$ согласована с векторной нормой

$\|\vec{y}\|_1=\max\limits_{1\le k\le n}\left|y_k\right|$.

② Октаэдрическая норма матрицы $\|A\|_2=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_{kj}\right|$ согласована с векторной нормой

$\|\vec{y}\|_2=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|y_k\right|$.

③ Евклидова норма матрицы $\|A\|_3=\sqrt{\max\limits_{1\le k\le n}\lambda_{A^*A}^{\langle k\rangle}}$ согласована с векторной нормой

$\|\vec{y}\|_3=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(y_k\right)^2}$.

○ $\|A\|_3=\sup\limits_{\|\vec{y}\|\ne 0}\dfrac{\|A\vec{y}\|_3}{\|\vec{y}\|_3}=\sup\limits_{\|\vec{y}\|\ne 0}\sqrt{\dfrac{(A\vec{y},\,A\vec{y})}{(\vec{y},\,\vec{y})}}=\sqrt{\sup\limits_{\|\vec{y}\|\ne 0}\dfrac{(A\vec{y},\,A\vec{y})}{(\vec{y},\,\vec{y})}}=\sqrt{\sup\limits_{\|\vec{y}\|\ne 0}\dfrac{(A^*A\vec{y},\,\vec{y})}{(\vec{y},\,\vec{y})}}$.

Заметим, что матрица $B=A^*A$: $A^*=\overline{A^T}$, $\overline{\left(A^*A\right)^T}=\overline{A^T\left(A^*\right)^T}=\overline{A^T}\,\overline{\left(A^*\right)^T}=A^*A$, т.е. существует ОНБ из собственных векторов матрицы B: $B\vec{e}_i=\lambda_i\vec{e}_i,\ i=\overline{1,\,n}$.

И $B \ge 0$, т.е. $(B\bar{y},\ \bar{y}) \ge 0$: $(B\bar{y},\ \bar{y}) = (A^* A\bar{y},\ \bar{y}) = (A\bar{y},\ A\bar{y}) = |A\bar{y}|^2 \ge 0$, т.е. собственные значения $\lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle} \ge 0$, $i = \overline{1, n}$.

Представим $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$, $(\bar{y},\ \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2$. Тогда $A^* A\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle} \bar{e}_i$, и $(A\bar{y},\ A\bar{y}) =$
$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle}$.

Отсюда $\min\limits_{1\le i\le n} \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 \le (A\bar{y},\ A\bar{y}) \le \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2$, т.е. $\frac{\|A\bar{y}\|_3}{\|\bar{y}\|_3} \le \sqrt{\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle}}$, т.о.
$\sqrt{\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle}}$ - верхняя грань отношения $\frac{\|A\bar{y}\|_3}{\|\bar{y}\|_3}$.

Покажем, что $\sqrt{\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle}}$ - точная верхняя грань отношения $\frac{\|A\bar{y}\|_3}{\|\bar{y}\|_3}$, т.е. она достигается. Действительно $\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle} = \lambda_{A^*A}^{\langle i^*\rangle}$, собственному значению $\lambda_{A^*A}^{\langle i^*\rangle}$ соответствует собственный вектор $\bar{e}_{i^*}$: $\frac{\|A\bar{e}_{i^*}\|_3}{\|\bar{e}_{i^*}\|_3} = \sqrt{\frac{(A\bar{e}_{i^*},\ A\bar{e}_{i^*})}{(\bar{e}_{i^*},\ \bar{e}_{i^*})}} = \sqrt{(A^* A\bar{e}_{i^*},\ \bar{e}_{i^*})} =$
$\sqrt{(\lambda_{A^*A}^{\langle i^*\rangle} \bar{e}_{i^*},\ \bar{e}_{i^*})} = \sqrt{\lambda_{A^*A}^{\langle i^*\rangle}}$.

●

В важном частном случае симметричной (самосопряженной) матрицы A имеем $\lambda_{A^*A}^{\langle i\rangle} = \lambda_{A^2}^{\langle i\rangle} = \left|\lambda_A^{\langle i\rangle}\right|^2$, поэтому $\|A\|_3 = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_A^{\langle i\rangle}$.

❸ Норма Фробениуса матрицы $\|A\|_\Phi = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2}$ подчинена евклидовой векторной норме $\|\bar{y}\|_3 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k)^2}$.

<u>**Важно**</u>: для всех норм $|a_{k,j}| \le \|A\|$ $\forall k,\ j = \overline{1, n}$.

Лемма 2.1. Если последовательность матриц $A^{\langle p\rangle}(x) = \left(a^{\langle p\rangle}{}_{kj}(x)\right)$ такова, что $\forall x \in I$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ $\left\|A^{\langle p\rangle}(x)\right\| \le \alpha_p$ и ряд $\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p$ сходится, то матричный ряд $\sum_{p=1}^{\infty} A^{\langle p\rangle}$ сходится ***абсолютно*** и ***равномерно*** на I.

○ $\left|a^{\langle p\rangle}{}_{kj}(x)\right| \le \left\|A^{\langle p\rangle}(x)\right\| \le \alpha_p$ $\forall x \in I$ и $\forall k,\ j = \overline{1, n}$.

Следовательно, ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a^{\langle p\rangle}{}_{kj}(x)$ сходится абсолютно и равномерно на I,

т.е. матричный ряд $\sum_{p=1}^{\infty} A^{\langle p\rangle}(x)$ сходится абсолютно и равномерно на I.

●

Лемма 2.2. Для любой квадратной матрицы $A = A_{n\times n} = \left(a_{kj}\right),\ a_{kj} = const,\ \forall k,\ j = \overline{1,n}$ и $\forall x_1 > 0$ ряд

$$E + \frac{xA}{1!} + \frac{x^2A^2}{2!} + \ldots + \frac{x^pA^p}{p!} + \ldots \tag{2.1}$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|x| < x_1$.

Замечание 2.1. x может быть таким, что $x \in \mathbb{C}$ - комплексное.

○ $xA = \left(xa_{kj}\right)$.

$\|xA\| \le \|x\|\,\|A\| \le x_1\|A\|$.

$$\left\|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^pA^p}{p!}\right\| \le \sum_{p=1}^{\infty}\left\|\frac{x^pA^p}{p!}\right\| \le \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left\|x^pA^p\right\|}{p!} \le \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|x^p\right|\,\left\|A^p\right\|}{p!} \le \sum_{p=1}^{\infty}\frac{|x|^p\,\|A\|^p}{p!} \le \sum_{p=1}^{\infty}\frac{{x_1}^p\,\|A\|^p}{p!} =$$

$$= e^{x_1\|A\|} < +\infty.$$

●

Пример 2.1. Найти e^A, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$.

$A^3 = -A,\ A^4 = E\ \ldots$

$$e^A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

■

§3. Свойства матричной экспоненты.

$\mathbf{1^0}$. Если матрицы A и B перестановочны: $A\cdot B = B\cdot A$, то $e^{xA}\cdot e^{xB} = e^{xB}\cdot e^{xA} = e^{x(A+B)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

○ Используя равенство $A\cdot B = B\cdot A$
и метод математической индукции,
как и в случае чисел устанавливается формула бинома:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^k\cdot B^{n-k} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\cdot\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = n!\sum_{k+m=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\cdot\frac{B^m}{m!}.$$

$$e^{x(A+B)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot n!\sum_{k+m=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\cdot\frac{B^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+m=0}^{n}\frac{x^kA^k}{k!}\cdot\frac{x^mB^m}{m!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!}\cdot\frac{x^mB^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!}e^{xB} = e^{xA}\cdot e^{xB} = e^{xB}\cdot e^{xA}.$$

●

Пример 3.1. (КОНТРПРИМЕР) $A = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

□ $A\cdot B = \begin{pmatrix}12 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, $B\cdot A = \begin{pmatrix}13 & 4\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, т.е. $\boxed{A\cdot B \neq B\cdot A}$.

$$e^A = e^4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ e^B = e^2\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$e^Ae^B = e^6\begin{pmatrix}8 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ \text{а}\ e^Be^A = e^6\begin{pmatrix}9 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}.$$

■

$\mathbf{2^0}$. Существование обратной матрицы для матричной экспоненты: $\left(e^{xA}\right)^{-1} = e^{-xA}$.

○ Следствие $\mathbf{1^0}$ при $B = -A$.●

$\mathbf{3^0}$. Невырожденность матричной экспоненты: $\det e^{xA}\neq 0$.

○ Следствие $\mathbf{2^0}$.●

$\mathbf{4^0}$. $A\cdot e^{xA} = e^{xA}\cdot A$.

○ $A\cdot e^{xA} = A\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!}\right)\cdot A = e^{xA}\cdot A$.●

$\mathbf{5^0}$. $\frac{d}{dx}e^{xA} = A\cdot e^{xA}$.

○ $$\frac{d}{dx}e^{xA} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!} = \left|\begin{matrix}\textit{ряд}\\ \textit{сходится}\\ \textit{равномерно}\end{matrix}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^kA^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}A^k}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nA^{n+1}}{n!} =$$

$$= e^{xA}\cdot A = \left|\begin{matrix}\textit{свойство}\\ 4^0\end{matrix}\right| = A\cdot e^{xA}.$$

●

Замечание 3.5.1. Свойство $\mathbf{5^0}$ дает решение СЛОДУ

$$\frac{d}{dx}\bar{y}(x) = A\bar{y}(x). \qquad (1.5\text{од})$$

вида $\bar{y}(x) = e^{xA}\vec{C}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, $C_k = const$, $\forall k = \overline{1, n}$:

$$\frac{d}{dx}\bar{y}(x) = \frac{d}{dx}e^{xA}\vec{C} = Ae^{xA}\vec{C} = A\bar{y}(x).$$

$\mathbf{6^0}$. Если $A = SBS^{-1}$, то $e^{A} = Se^{B}S^{-1}$.

○ По индукции докажем, что $A^n = SB^nS^{-1}$.

1. $\underline{n=1}$ $A = SBS^{-1}$ - дано.
2. $\underline{n=k}$ Пусть $A^k = SB^kS^{-1}$.
3. $\underline{n=k+1}$ $A^{k+1} = A\cdot A^k = SBS^{-1}\cdot SB^kS^{-1} = SB^{k+1}S^{-1}$.

Т.о., $e^{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{SB^nS^{-1}}{n!} = S\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}\right)S^{-1} = Se^{B}S^{-1}$.

●

$\mathbf{7^0}$. Если матрица $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ - диагональная, то $e^{xB} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$.

○ По индукции докажем, что $x^mB^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\ m}x^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{\ m}x^m \end{pmatrix}$.

1. $\underline{m=1}$ $xB = \begin{pmatrix} \lambda_1 x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n x \end{pmatrix}$ - дано.
2. $\underline{m=k}$ Пусть $x^kB^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\ k}x^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{\ k}x^k \end{pmatrix}$.

3. $\underline{m=k+1}$ $x^{k+1}B^{k+1} = xB\cdot x^k B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1{}^k x^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n{}^k x^k \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1{}^{k+1} x^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n{}^{k+1} x^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Т.о., $e^{xB} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m B^m}{m!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1{}^m x^m}{m!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_n{}^m x^m}{m!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$

●

Теорема 3.7.1. Если матрица A имеет простые собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, то найдутся такие постоянные матрицы $C_1,\ldots,C_n$, что

$$e^{xA} = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}. \qquad (3.7.1)$$

Матрицы C_k являются решением системы уравнений

$$A^m = \sum_{k=1}^{n} C_k \lambda_k{}^m, \; m = \overline{0, n-1}. \qquad (3.7.2)$$

Решение системы (3.7.2)имеет следующий вид:

$$C_k = \frac{\prod\limits_{\substack{j=\overline{1,n} \\ j\neq k}} (A-\lambda_j E)}{\prod\limits_{\substack{j=\overline{1,n} \\ j\neq k}} (\lambda_k - \lambda_j)}. \qquad (3.7.3)$$

○ Матрица A представима в виде $A = H\cdot \mathbf{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot H^{-1}$, $xA = H\cdot \mathbf{diag}(x\cdot\lambda_1,\ldots,x\cdot\lambda_n)\cdot H^{-1}$.

По С$\mathbf{6^0}$ и С$\mathbf{7^0}$ $e^{xA} = H\cdot \mathbf{diag}(e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x})\cdot H^{-1}$. Перемножая матрицы, получим формулу (3.7.1).

Раскладывая правую и левую части тождества (3.7.1) в степенные ряды и приравнивая коэффициенты при $x^0,\ldots,x^{n-1}$, получаем систему уравнений (3.7.2).

Исключим из системы (3.7.2) C_n, вычитая из каждого уравнения системы предыдущее, умноженное на λ_n, получим систему для $C_1,\ldots,C_{n-1}$:

$$A^{m-1}(A-\lambda_n E) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \lambda_k{}^{m-1}(\lambda_k - \lambda_n), \; m = \overline{1, n-1}. \qquad (3.7.2\text{-}1)$$

1-ое уравнение системы (3.7.2) отбрасывает, как содержащее C_n: для определения $C_1,\ldots,C_{n-1}$ нужно $(n-1)$-но уравнение.

Теперь исключим из системы (3.7.2-1) C_{n-1}, вычитая из каждого уравнения системы предыдущее, умноженное на λ_{n-1}, получим систему для $C_1, \dots, C_{n-2}$:

$$A^{m-2}(A-\lambda_{n-1}E)(A-\lambda_n E)=\sum_{k=1}^{n-2} C_k \lambda_k^{\ m-2}(\lambda_k-\lambda_{n-1})(\lambda_k-\lambda_n),\ m=\overline{2,\ n-1}. \qquad (3.7.2\text{-}2)$$

Продолжая этот процесс последовательного исключения далее, в итоге получим

$$(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)\cdots(A-\lambda_{n-1}E)(A-\lambda_nE)=C_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_1-\lambda_n),$$

откуда

$$C_1=\frac{(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)\cdots(A-\lambda_{n-1}E)(A-\lambda_nE)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_1-\lambda_n)}.$$

Формулы для остальных матриц, получаются циклической перестановкой индексов.

●

8⁰. Если $A=\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix} = diag\{A_1, \dots, A_p\}$ - блочно-диагональная матрица, то

$$e^A = diag\{e^{A_1}, \dots, e^{A_p}\}.$$

○ По правилу умножения матриц $A^k = diag\{A_1^{\ k}, \dots, A_p^{\ k}\}$.

Доказательство аналогично С**7⁰**.

●

9⁰. Если $A=J_\lambda=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ (жорданова клетка), то

$$e^{xA}=e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

○ $A=\lambda E+Q$, $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}=(q_{ki})$, $q_{ki}=0$ при $i\neq k+1$ и $q_{k[k+1]}=1$.

$$\vec{e}_k = \left(\alpha^k{}_j\right),\ \alpha^k{}_j = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

$Q\vec{e}_1 = \vec{0}$,

$Q\vec{e}_k = \vec{e}_{k-1}$, $k \geq 2$.

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},\ Q^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},\ Q^n = (0).$$

$e^{xQ} = E + xQ + \dfrac{x^2}{2!}Q^2 + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}Q^{n-1}$ откуда и получаем

$$e^{xA} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x & \dfrac{x^2}{2!} & \cdots & \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \dfrac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

●

Теорема 3.9.1. Если матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $m_1, \ldots, m_k$ соответственно, $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$, то найдутся многочлены с матричными коэффициентами $P^{[j]}_{m_j-1}(x)$ такие, что $e^{xA} = \sum_{j=1}^{k} P^{[j]}_{m_j-1}(x)e^{\lambda_j x}$.

○ Из теоремы Жордана $A = H \cdot \mathbf{diag}(E + \lambda_1 Q_1, \ldots, E + \lambda_k Q_k) \cdot H^{-1}$.

По C8^0 $e^{xA} = H \cdot \mathbf{diag}\left(e^{(E+\lambda_1 Q_1)x}, \ldots, e^{(E+\lambda_k Q_k)x}\right) \cdot H^{-1}$.

По C9^0 $e^{(E+\lambda_j Q_j)x} = \hat{P}^{[j]}_{m_j-1}(x)e^{\lambda_j x}$.

Перемножая матрицы получаем $e^{xA} = \sum_{j=1}^{k} P^{[j]}_{m_j-1}(x)e^{\lambda_j x}$

●

§4. Решение СЛОДУ с помощью матричной экспоненты.

Замечание. Свойства $6^0 \div 9^0$ дают способ отыскания матричной экспоненты с помощью перехода к жорданову базису.

Пример 4.1. Найдите e^A, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ **1 способ**. $|A - \lambda E| = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Находим базис из собственных векторов:

$\lambda_1 = 0$, $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_2 = 2$, $A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

В базисе из собственных векторов $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$.

В исходном базисе $e^A = He^B H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^2 & -1+e^2 \\ -1+e^2 & 1=e^2 \end{pmatrix}$.

2 способ. $|A - \lambda E| = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

$e^{xA} = D + Fe^{2x}$.

Раскладываем обе части в ряд по степеням x: $e^{xA} = E + xA + \ldots$,

$D + Fe^{2x} = D + F(1 + 2x + \ldots)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему:

$$\begin{cases} E = D + F, \\ A = 2F. \end{cases}$$

$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = E - F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $e^{xA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{2t}x & -1+e^{2x} \\ -1+e^{2x} & 1=e^{2x} \end{pmatrix}$. При $x=1$ получаем решение $e^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^2 & -1+e^2 \\ -1+e^2 & 1=e^2 \end{pmatrix}$.

■

Теорема 4.1. Общее решение неоднородной СЛОДУ

$$\frac{d}{dx}\bar{y}(x) = A\bar{y}(x) + \vec{f}(x) \qquad (1.5)$$

задается формулой

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{C} + e^{xA}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-\xi A}\vec{f}(\xi)d\xi\,, \qquad (4.1)$$

где $x_0 \in I \subset \mathbb{R}^1_x$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, $C_k = const$, $\forall k = \overline{1, n}$, e^{xA} - матричная экспонента.

○ По **C5**^{0} $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{C}$ решение соответствующей однородной СЛОДУ (1.5од).

Метод вариации постоянных $\vec{C} = \vec{C}(x)$, $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{C}(x)$.

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \frac{d}{dx}e^{xA}\vec{C}(x) = \left|\text{C}\,5^0\right| = \underline{Ae^{xA}\vec{C}(x)} + e^{xA}\frac{d}{dx}\vec{C}(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x) =$$
$$= \underline{Ae^{xA}\vec{C}(x)} + \vec{f}(x).$$

Следовательно $e^{xA}\dfrac{d}{dx}\vec{C}(x) = \vec{f}(x)$ или (**C2**$^{\mathbf{0}}$) $\dfrac{d}{dx}\vec{C}(x) = e^{-xA}\vec{f}(x)$.

Откуда $\vec{C}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\xi A}\vec{f}(\xi)d\xi + \vec{d}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$, $d_k = const$, $\forall k = \overline{1, n}$,

и $\vec{y}(x) = e^{xA}\left[\int\limits_{x_0}^{x} e^{-\xi A}\vec{f}(\xi)d\xi + \vec{d}\right]$.

●

Задача Коши $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{y}(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x), & (1.4.1) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. & \text{(Н У)} \end{cases}$

Теорема 4.2. Решение ЗК (1.5) - (Н У) существует и единственно на I и задается формулой

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}_0 + e^{xA}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-\xi A}\vec{f}(\xi)d\xi\,. \qquad (4.2)$$

○ Подставляя формулу (4.1) для общего решения неоднородной СЛОДУ (1.4) в (Н У), получим

$e^{x_0 A}\vec{C} = \vec{y}_0$ или $\vec{C} = e^{-x_0 A}\vec{y}_0$.

Следовательно, решение существует.

$\vec{C}$ находим единственным образом, следовательно, решение единственно.

●