Лекция 18 (2).

Гл. VII. Линейные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

§1. Формула Лиувилля-Остроградского.

Напомним ряд определений и формулировок

Лекции 6, 7 гл.II п 1

Линейное ОДУ n-го порядка:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = f(x), \tag{1}$$

$a_k(x) \in C(I),\ k = \overline{0, n},\ a_0(x) \neq 0\ \ \forall x \in I, \quad f(x) \in I$.

Задача Коши для ЛОДУ

Найти решение (1) на I, где $x_0 \in I$, и выполнены **начальные условия** (НУ)

$$y(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \tag{2}$$

Замена

$$y_1 = y,\ y_2 = y_1' = y',\ y_3 = y_2' = y'',\ \ldots,\ y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)} \tag{3}$$

(лекция 9 Гл. III § 1 замечание к **лемме 1.1**) приводит ЛОДУ (1) к СЛОДУ

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = A\vec{y} + \vec{f}, \tag{4}$$

а НУ (2) к виду

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^0,\ \vec{y}^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_{n-1}^0 \\ y_n^0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix},\ \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Задача Коши для СЛОДУ

Найти решение (4) на I, где $x_0 \in I$, и выполнены НУ (5).

Замечание 1. Напомним, что от (4) к (1) не всегда удается перейти.

По **теореме 5.2** (о продолжении решения на весь заданный интервал) получаем (доказать самим), что при $\dfrac{a_j(x)}{a_0(x)} \in C(I)$, $j=\overline{1,n}$, $\dfrac{f(x)}{a_0(x)} \in C(I)$, где $a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, решение ЗК (4)-(5) существует и единственно на всем I.

Пример 1. Укажите интервал, на который можно максимально продолжить решение ЗК $(x+2)y'' - 3y' + y\sqrt{1-x} = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

□ $a_0(x) = x+2 \neq 0$ при $x \neq 2$.

$\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = \dfrac{-3}{x+2} \in C((-\infty, -2) \cup (-2, +\infty))$, $\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+2} \in C((-\infty, -2) \cup (-2, 1])$.

$x_0 = 0 \in (-2, 1]$.

Решение ЗК $y = \varphi(x)$ можно гарантированно продолжить на $I = (-2, 1]$.

Если $\exists \lim\limits_{x \to -2} \varphi(x)$, то $\varphi(-2)$ можно доопределить по непрерывности. В этом случае говорим, что решение можно продолжить на $I = [-2, 1]$.

■

Лемма 1.1.При замене (3) линейно-зависимые решения однородного ЛОДУ (1од)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0 \qquad (1\text{од})$$

$a_k(x) \in C(I)$, $k = \overline{0, n}$, $a_0(x) \neq 0 \ \forall x \in I$,

переходят в линейно зависимые решения однородной СЛОДУ (4од)

$$\frac{d}{dx}\bar{y} = A\bar{y}, \qquad (4\text{од})$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$, т.е. вида (6),

и наоборот.

○ ⇨ Пусть решения (1од) $y^{[1]}(x), \ldots, y^{[k]}(x)$ линейно-зависимы, т.е. $\exists C_l = const$, $l = \overline{1, k}$: $\sum\limits_{l=1}^{k} C_l^2 \neq 0$ и

$$\sum_{l=1}^{k} C_l y^{[l]}(x) \equiv 0, \ \forall x \in I. \qquad (\text{a})$$

Дифференцируя (a) $n-1$ раз, получим

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{k} C_l y^{[l]} \equiv 0, \\ \sum_{l=1}^{k} C_l \left(y^{[l]}\right)' \equiv 0, \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{k} C_l \left(y^{[l]}\right)^{(n-1)} \equiv 0. \end{cases} \qquad (б)$$

При указанной замене решения (1од) $y^{[l]}(x)$ переходят в решения (4од)

$$\vec{y}^{[l]}(x) = \begin{pmatrix} y^{[l]} \\ \left(y^{[l]}\right)' \\ \vdots \\ \left(y^{[l]}\right)^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно равенства (б) можно записать в виде

$$\sum_{l=1}^{k} C_l \vec{y}^{[l]}(x) \equiv 0,\ \sum_{l=1}^{k} C_l^{\ 2} \neq 0,\ \forall x \in I, \qquad (в)$$

т.е. решения (4од) линейно-зависимы.

⇦ Пусть решения однородной СЛОДУ (4од) $\vec{y}^{[l]}(x)$ линейно-зависимы.

Тогда имеет место (в).

Беря от каждого вектора $\vec{y}^{[l]}(x)$ его первую координату $y_1^{[l]}(x) = y^{[l]}(x)$, получаем (а), т.е. решения $y^{[l]}(x)$ линейно-зависимы.

●

По теореме 3 (лекция 11) любое решение (4) представимо в виде

$$\vec{y}(x) = \vec{y}^{*}(x) + Y(x)\vec{C}, \qquad (4р)$$

где $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, $C_j = const$, $j = \overline{1, n}$, а $\vec{y}^{*}(x)$ - частное решение (4),

$Y(x)$ - фундаментальная матрица: ее столбцы $\vec{y}^{[1]}(x), \ldots, \vec{y}^{[n]}(x)$ образуют ФСР (4.од).

Теорема 1.1 (о переходе одной фундаментальной матрицы к другой).

Пусть $Y(x)$ - фундаментальная матрица (4од).
Матрица $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = const\ i, j = \overline{1, n}$ такова, что $\det C \neq 0$.
Тогда $V(x) = Y(x) \cdot C$ - фундаментальная матрица (4од).

○ Столбцы $V^{[j]}(x) = Y(x) \cdot C^{[j]}$, $i, j = \overline{1, n}$ - решения (4од) по **теореме 2** (лекция 10).

$\det V(x) = \det(Y(x) \cdot C) = \det Y(x) \cdot \det C \neq 0$,

следовательно, столбцы $V^{[j]}(x)$, $i, j = \overline{1, n}$ - линейно-нещависимы,

т.е., образуют ФСР.●

Следствие 1.1. Любую ФСР можно выразить через исходную.

○ Пусть $Y(x)$ - исходная ФСР, $V(x)$ - новая ФСР.

Предствим ее в виде $V(x)=Y(x)\cdot C$, $C=(c_{ij})$, $c_{ij}=const$ $i,j=\overline{1,n}$.

Тогда $V^{[j]}(x)=Y(x)\cdot C^{[j]}$ - система относительно $C_i^{[j]}=c_{ij}$ $i=\overline{1,n}$ $\forall j=\overline{1,n}$, с невырожденной (основной) матрицей.

Следовательно существует ее единственное решение $C_i^{[j]}=c_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$ для всех $j=\overline{1,n}$.

При этом матрица $C=(c_{ij})$ - невырождена, так как в противном случае $\det V(x)=0$.●

Лемма 1.2 (правило дифференцирования детерминанта).

Пусть $D(x)$ - детерминант порядка n с дифференцируемыми элементами. Тогда
$D'(x)=D_1(x)+\cdots+D_n(x)$,
где детерминанты $D_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, получаются из $D(x)$ заменой всех элементов его i-й строки их призводными.

○ $$D(x)=\sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}d_{1\,j_1}d_{2\,j_2}\cdots d_{n\,j_n}, \qquad (7)$$

$d_{i\,j}=d_{i\,j}(x)\in C(I)$ - элемент i-й строки, j-го столбца,

$N(j_1,\ldots,j_n)$ - число нарушений порядка в перестановке $j_1,\ldots,j_n$ (всего перестановок $n!$).

Производная каждого слагаемого в (7) равна сумме из n слагаемых

$$\left(d_{1\,j_1}d_{2\,j_2}\cdots d_{n\,j_n}\right)'=\left(d_{1\,j_1}\right)'d_{2\,j_2}\cdots d_{n\,j_n}+d_{1\,j_1}\left(d_{2\,j_2}\right)'\cdots d_{n\,j_n}+\cdots+d_{1\,j_1}d_{2\,j_2}\cdots\left(d_{n\,j_n}\right)',$$

где i-ое слагаемое отличается от дифференцируемого выражения только заменой $d_{i\,j_i}$ на $\left(d_{i\,j_i}\right)'$.

А так как $d_{i\,j_i}$ элемент i-й строки в $D(x)$,

то собирая вместе все i-е слагаемые из всех производных каждого слагаемого в (7), получим детерминант $D_i(x)$,

у которого i-я строка состоит из производных i-й строки детерминанта $D(x)$,

а остальные строки совпадают с его строками (со строками $D(x)$).

Отсюда

$$D'(x)=D_1(x)+D_2(x)+\cdots+D_n(x).$$

Подробнее:

$$D'(x)=\sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}\left(d_{1\,j_1}d_{2\,j_2}\cdots d_{n\,j_n}\right)'=$$

$$=\sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}\left(\left(d_{1\,j_1}\right)'d_{2\,j_2}\cdots d_{n\,j_n}+d_{1\,j_1}\left(d_{2\,j_2}\right)'\cdots d_{n\,j_n}+\cdots+d_{1\,j_1}d_{2\,j_2}\cdots\left(d_{n\,j_n}\right)'\right)=$$

$$=\sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}\left(d_{1\,j_1}\right)'d_{2\,j_2}\cdots d_{n\,j_n}+\sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}d_{1\,j_1}\left(d_{2\,j_2}\right)'\cdots d_{n\,j_n}+\ldots+$$

$$+\sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}d_{1\,j_1}d_{2\,j_2}\cdots\left(d_{n\,j_n}\right)'=D_1(x)+D_2(x)+\cdots+D_n(x).$$●

Определение. ***Следом*** матрицы $A_{n\times n}=(a_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$, называется сумма ее диагональных элементов и обозначается

$$trA=spA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\,.$$ [1]

Теорема 1.2 (формула Лиувилля-Остроградского для СЛОДУ).

Пусть $W(x)$ вронскиан любых n решений однородной СЛОДУ (4од), где $A=(a_{ij}(x))$, $a_{ij}(x)\in C(I)$, $i,j=\overline{1,n}$.

Тогда $\forall x\in I$ и $\forall x_0\in I$ справедлива ***формула Лиувилля-Остроградского***

$$W(x)=W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}trA(\xi)d\xi\right\}. \qquad (8)$$

○ Столбцы детерминанта $W(x)$ - решения (4од).

По **лемме 1.2** $W'(x)=D_1(x)+\cdots+D_n(x)$,

где элементы i-й строки у $D_i(x)$ есть $\left(y_i^{[j]}(x)\right)'=\frac{d}{dx}y_i^{[j]}(x)$,

но из $\frac{d}{dx}\bar{y}^{[j]}(x)=A\bar{y}^{[j]}(x)$ следует,

что $\frac{d}{dx}y_i^{[j]}(x)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k^{[j]}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$.

Остальные строки у $D_i(x)$ те же, что и у $W(x)$.

Вычтем $\forall k\neq i$ из i-й строки $D_i(x)$ его k-ю строку, умноженную на a_{ik}:

- величина $D_i(x)$ от этой процедуры не изменится,
- в i-й строке $D_i(x)$ останутся элементы $\begin{pmatrix}a_{ii}y_i^{[1]} & a_{ii}y_i^{[2]} & \cdots & a_{ii}y_i^{[n]}\end{pmatrix}$.

Вынося множитель a_{ii}, получаем $D_i(x)=a_{ii}W(x)$.

Т.о., $W'(x)=\sum_{i=1}^{n}D_i(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}W(x)=trA\cdot W(x)$.

$W'(x)=trA\cdot W(x)$ - ОДУ 1-го порядка.

Интегрируя его, получаем $W(x)=W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}trA(\xi)d\xi\right\}$.●

Замечание 2. Если $W(x_0)=0$, то $W(x)=0$ $\forall x\in I$.

Если $W(x_0)\neq 0$, то $W(x)\neq 0$ $\forall x\in I$.

Сравните **замечание 1** с **теоремой 2** (лекция 6) и следствием **леммы** 2 (альтернатива) (лекция 10).

Следствие 1.2. (формула Лиувилля-Остроградского для ЛОДУ)

Для решения ЛОДУ (1од) справедлива формула Лиувилля-Остроградского

[1] Французский: trace (ввел Монж в 1799г.), немецкий: spur.

$$W(x)=W(x_0)\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}d\xi\right\}. \qquad (9)$$

○ $W(x)$ для ФСР (1од) тот же, что и $W(x)$ для (4од) при замене (3): $y_1^{[j]}(x)=y^{[j]}(x)$, $y_2^{[j]}(x)=\left(y^{[j]}(x)\right)'$, $y_3^{[j]}(x)=\left(y^{[j]}(x)\right)''$, ... , $y_n^{[j]}(x)=\left(y^{[j]}(x)\right)^{(n-1)}$,

т.е. $\bar{y}^{[j]}(x)=\begin{pmatrix} y^{[j]} \\ \left(y^{[j]}\right)' \\ \vdots \\ \left(y^{[j]}\right)^{(n-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1^{[j]} \\ y_2^{[j]} \\ \vdots \\ y_n^{[j]} \end{pmatrix}$.

При этом $a_{ii}=0$ при $i=\overline{1,\,n-1}$, $a_{nn}=-\dfrac{a_1}{a_0}$, поэтому $trA=-\dfrac{a_1}{a_0}$, и формула (8) принимает вид (9).●

Рассмотрим с новых позиций

Пример 1 (продолжение). Укажите интервал, на который можно максимально продолжить решение ЗК $(x+2)y''-3y'+y\sqrt{1-x}=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

□ Решение ЗК $y=\varphi(x)$ можно гарантированно продолжить на $I=(-2,\,1]$.

$$W(x)=W(x_0)\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{-3}{\xi+2}d\xi\right\}=W(x_0)\exp\left\{3\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\xi+2}\right\}=W(x_0)\exp\left\{3\ln|\xi+2|\Big\|_{x_0}^{x}\right\}=$$

$$=W(x_0)\exp\left\{\ln\left|\frac{x+2}{x_0+2}\right|^3\right\}=W(x_0)\left|\frac{x+2}{x_0+2}\right|^3\xrightarrow[x\to-2]{}0.$$

И решение можно продолжить на $I=[-2,\,1]$.

При $x=2$ ЛОДУ становится ОДУ 1-го порядка.■

Лемма 1.3.

Если известно одно частное решение однородного ЛОДУ 2-го порядка, то его общее решение находится квадратурами.

○ Пусть известно одно частное решение $y_1(x)$ однородного СЛОДУ 2-го порядка

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0. \qquad (г)$$

Применим формулу Лиувилля Остроградского к нахождению общего решения ЛОДУ (г). Пусть $y(x)$ - любое решение (г) такое, что $y_1(x)\equiv/\equiv y(x)$.

По формуле (9): $\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=W(x_0)\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}d\xi\right\}$. Обозначим $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}=p'(x)$.

Раскрывая определитель, получаем для $y(x)$ ЛОДУ 1-го порядка:

$$y_1\cdot y'-y_1'\cdot y=W(x_0)\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}d\xi\right\}=C\exp\left\{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right\},\text{ где } C=W(x_0)e^{p(x_0)}.$$

Заметим, что $\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{y_1 \cdot y' - y_1' \cdot y}{(y_1)^2}$, и деля обе части последнего равенства, находим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{C}{(y_1)^2}\exp\left\{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right\}.$$

Откуда $y(x)$ определяется квадратурой $y = y_1\left[\int \frac{C}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} dx + C_1\right]$.

Полученное решение сожержит две произвольные постоянные. следовательно, является общим.●

Замечание 3. ЛОДУ (1од) является однородным относительно y, y', y'', ... , $y^{(n)}$. Замена $y' = z(x)y(x)$ приводит его к ОДУ порядка $(n-1)$.

Однако эта замена в большинстве случаев нецелесообразна, т.к. полученное относительно $z(x)$ уравнение уже не является линейным: $y'' = z'(x)y(x) + z(x)y'(x) = \left(z^2(x) + z'(x)\right)y(x)$ и т.д., и, следовательно, теряет те ппостые свойства, которые характеризуют линейные уравнения.

Лемма 1.4.

Если известно одно частное решение однородного ЛОДУ (1од) n-го порядка, то задача отыскания решения этого уравнения приводится к интегрированию однородного ЛОДУ порядка $(n-1)$.

○ Пусть $y_1(x) \neq 0 \ \ \forall x \in I_1 \subseteq I$, I_1 не пустое, $y_1(x)$ - решение (1од).

Сделаем замену искомой функции: $y(x) = y_1(x)u(x)$.

Найденные по формуле Лейбница производные

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{k} C_k^j \left(y_1(x)\right)^{(j)} u^{(k-j)}(x)$$

подствим в (1од).

Так как $u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)$ войдут в ОДУ в 1-ой степени, то полученное ОДУ относительно $u(x)$ будет линейным однородным:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(x)u^{(n-k)}(x) = 0.$$

При этом коэффициент $b_n(x)$ при $u(x)$

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(n-k)}(x) = 0,$$

в силу того, что $y_1(x)$ - решение (1од).

Т.о., в полученном для $u(x)$ уранении порядок понижается, если ввести новую искомую функцию $z(x) = u'(x)$.●

Пример 2. Найти общее решение уравнения $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$.

□ $x^2(2x-1) \neq 0$

❶ Угадываем $y_1(x)=x$.

❷ Замена $y(x)=x\cdot u(x)$,

$$y'(x)=u(x)+x\cdot u'(x),$$
$$y''(x)=2u'(x)+x\cdot u''(x),$$
$$y'''(x)=3u''(x)+x\cdot u'''(x).$$

❸ $x^2(2x-1)(3u''+x\cdot u''')+(4x-3)x(2u'+x\cdot u'')-2x(u+x\cdot u')+2xu=0$,

$x^3(2x-1)\cdot u'''+\left(3x^2(2x-1)+x^2(4x-3)\right)u''+\left(2x(4x-3)-2x^2\right)u'+(-2x+2x)u=0$

или $x^3(2x-1)\cdot u'''+\left(3x^2(2x-1)+x^2(4x-3)\right)u''+\left(2x(4x-3)-2x^2\right)u'=0$ - уравнение не содержит $u(x)$.

❹ Замена $z(x)=u'(x)$ приводит к ЛОДУ 2-го порядка

$x^3(2x-1)\cdot z''+\left(10x^3-6x^2\right)z'+\left(6x^2-6x\right)z=0$ или

$x^2(2x-1)\cdot z''+2x(5x-3)z'+6(x-1)z=0$.

❺ Попытаемся найти решение последнего ЛОДУ в виде $z=x^\alpha$:

$x^2(2x-1)\cdot\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+2x(5x-3)\cdot\alpha x^{\alpha-1}+6(x-1)x^\alpha=0$.

Т.к. $x^2(2x-1)\neq 0$, то $(2x-1)\cdot\alpha(\alpha-1)+2(5x-3)\cdot\alpha+6(x-1)=0$ или

$x(2\alpha(\alpha-1)+10\alpha+6)+(-\alpha(\alpha-1)-6\alpha-6)=0$.

x и 1 линейно-независимы, поэтому $\begin{cases}\alpha^2-\alpha+5\alpha+3=0,\\ \alpha^2-\alpha+6\alpha+6=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}\alpha^2+4\alpha+3=0,\\ \alpha^2+5\alpha+6=0,\end{cases}$

или $\begin{cases}(\alpha+3)(\alpha+1)=0,\\ (\alpha+3)(\alpha+2)=0.\end{cases}$

$\boxed{z_1=\dfrac{1}{x^3}}$.

❻ По формуле Лиувилля-Остроградского $z=\dfrac{1}{x^3}\left[\int Cx^6e^{-\int\frac{2x(5x-3)}{x^2(2x-1)}dx}dx+C_1\right]=$

$$\frac{1}{x^3}\left[\int Cx^6e^{-\int\frac{10x-6}{x(2x-1)}dx}dx+C_1\right]=\frac{1}{x^3}\left[\int Cx^6e^{-\int\frac{12x-6-2x}{\xi(2x-1)}dx}dx+C_1\right]=$$

$$=\frac{1}{x^3}\left[\int Cx^6e^{-\left[\int\frac{6}{x}dx+\int\frac{-2}{(2x-1)}dx\right]}dx+C_1\right]=\frac{1}{x^3}\left[\int C_2x^6e^{-\left[6\ln|x|-\ln|2x-1|\right]}dx+C_1\right]=$$

$$=\frac{1}{x^3}\left[\int C_2x^6e^{\ln\frac{|2x-1|}{x^6}}dx+C_1\right]=\frac{1}{x^3}\left[\int C_2x^6\frac{2x-1}{x^6}dx+C_1\right]=\frac{1}{x^3}\left[C_2\int(2x-1)dx+C_1\right]=$$

$$=\frac{1}{x^3}\left[C_2\left(x^2-x\right)+C_1\right]=\frac{C_1}{x^3}+C_2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

❼ $\boxed{u'(x)=\dfrac{C_1}{x^3}+C_2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}$, т.е. $\boxed{u(x)=\dfrac{c_1}{x^2}+C_2\left(\ln|x|+\dfrac{1}{x}\right)+C_3}$ и

Ответ: $\boxed{y(x)=\dfrac{c_1}{x}+C_2(x\ln|x|+1)+C_3x}$ ■