Лекция 20 (5).

Гл. VII. Линейные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

§2. Линейные однородные уравнения 2-го порядка.

Следствие 2.3. (о расстоянии между соседними нулями).

Пусть в (2.3) $0 < m^2 \le Q(x) \le M^2$, а x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$)- соседние нули решения $z(x)$ (2.3).

Тогда $\dfrac{\pi}{M} \le x_2 - x_1 \le \dfrac{\pi}{m}$.

○ Доказательсво от противного.

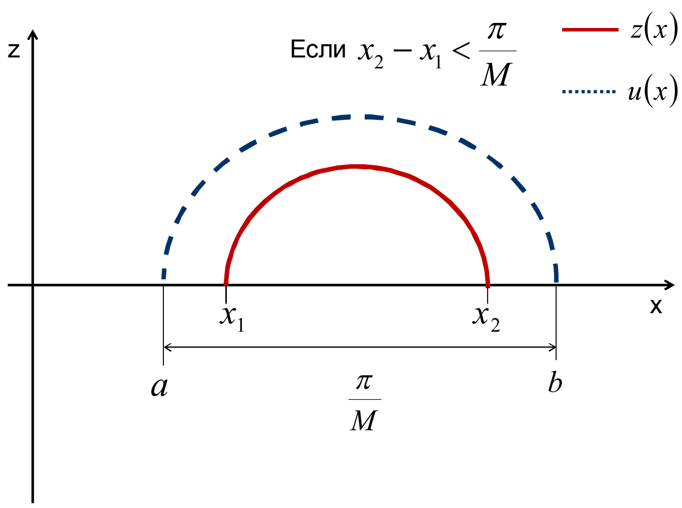
По условию $z(x_1) = z(x_2) = 0$ и $z(x) > 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$ (для определенности: случай $z(x) < 0$ рассматривается аналогично).

① Рассмотри ОДУ $u''(x) + M^2 u(x) = 0$.

Его решения

$u(x) = C_1 \cos Mx + C_2 \sin Mx \; = \; A \sin(Mx + \varphi)$,

где $A = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$, $\dfrac{C_1}{A} = \sin\varphi$, $\dfrac{C_2}{A} = \cos\varphi$.



Расстояние между соседними нулями $u(x)$ равно $\dfrac{\pi}{M}$.

Причем, подбирая параметр φ, можно эти нули располагать в любом наперед заданном месте промежутка I.Если $x_2 - x_1 < \dfrac{\pi}{M}$, то обе точки x_1 и x_2 при некотором значении параметра φ оказываются внутри некоторого интервала (a, b): $u(a) = u(b)$ и $b - a = \dfrac{\pi}{M}$.

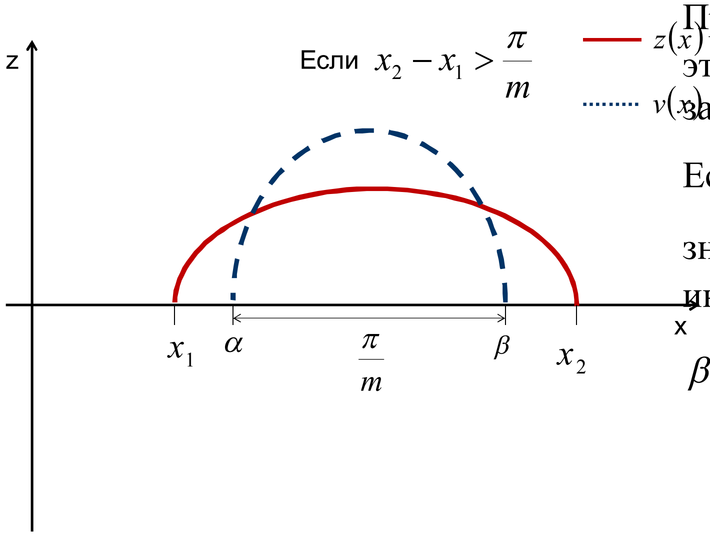
Но тогда решение $u(x)$ не имеет нулей на отрезке $[x_1, x_2] \in (a, b)$, что противоречит **теореме 2.1** Штурма (сравнения).

Следовательно, $\dfrac{\pi}{M} \le x_2 - x_1$.

② Рассмотри ОДУ $w''(x) + m^2 w(x) = 0$.

Его решения

$u(x) = D_1 \cos mx + D_2 \sin mx \; = \; B \sin(mx + \gamma)$, где $B=\sqrt{D_1^{\,2}+D_2^{\,2}}$, $\dfrac{D_1}{B}=\sin\gamma$, $\dfrac{D_2}{B}=\cos\gamma$.



Причем, подбирая параметр γ, можно эти нули располагать в любом наперед заданном месте промежутка I.

Если $x_2-x_1>\dfrac{\pi}{m}$, то при некотором значении параметра γ оказываются интервал $(\alpha,\,\beta)$: $u(\alpha)=u(\beta)$ и $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{m}$, содержится в $(x_1,\,x_2)$.

Расстояние между соседними нулями $w(x)$ равно $\dfrac{\pi}{m}$.

Но тогда решение $z(x)$ не имеет нулей на отрезке $[a,\,b]\in(x_1,\,x_2)$, что противоречит **теореме 2.1** Штурма (сравнения).

Следовательно, $x_2-x_1\le\dfrac{\pi}{m}$.●

Гл. VIII. Нормальные автономные системы ОДУ.

§1. Основные понятия и определения.

Определение Нормальная система ОДУ

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{f}(\vec{x}), \tag{1.1}$$

где $t\in I\subseteq\mathbb{R}_t^1$ - независимое переменное,

$\vec{x}=\vec{x}(t)\in D\subseteq\mathbb{R}_{\vec{x}}^n$,

правая часть которой $\vec{f}(\vec{x})$ не зависит от t (независимого переменного) называется автономной (динамической, консервативной) системой ОДУ.

Замечание 1. Переход к обозначениям $\vec{x}=\vec{x}(t)$ связан с тем, что в теории динамических (консервативных, автономных) систем независимое переменное принято истолковывать, как время.

Так как при законе движения $\vec{x} = \vec{x}(t)$ вектор скорости выражается по формуле $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)$, то автономная система ОДУ (АСОДУ) (1.1) задает ***поле скоростей*** в пространстве $\vec{x}$.

Определение. Переменные $x_1(t), \dots, x_n(t)$ называются ***фазовыми*** переменными, а область $D \subseteq \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ - ***фазовым*** пространством АСОДУ (1.1)

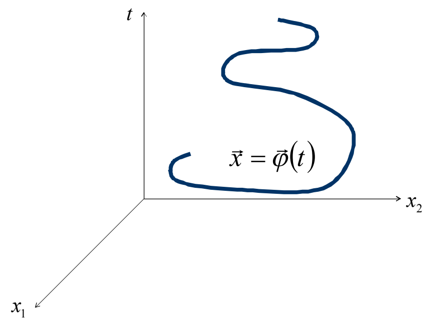
Специфика АСОДУ (1.1) заключается в том, что в каждой точке фазового пространства поле скоростей $\vec{v} = \vec{f}(\vec{x})$ не меняется с течением времени, т.е. является ***стационарным***.

Замечание 2. В дальнейшем, если не оговорено противное, считаем, что $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(D)$. Это обеспечит выполнение условий **теоремы 1**. (существования и единственности) (лекция 15).
А решение АСОДУ (1.1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ будем считать, что непродолжаемо (т.е. максимально продолжено).

Область $G = I \times D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}_{t,\vec{x}}$.

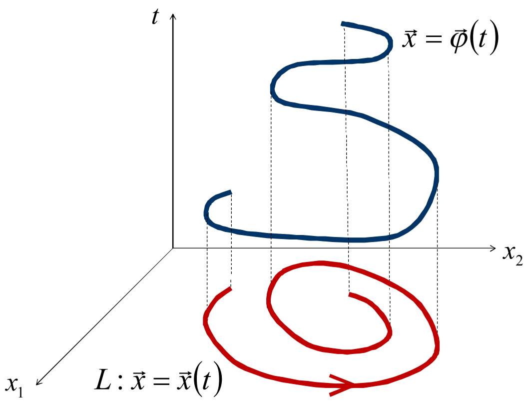
График решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ АСОДУ (1.1) располагается в G и называется интегральной кривой.

Наряду с ***геометрической*** интерпретацией рассмотрим кинематическую интерпретацию АСОДУ (1.1)



ОДУ, составляющие АСОДУ (1.1) будем трактовать, как законы движения материальной точки с координатами $x_1(t), \dots, x_n(t)$ в фазовом пространстве D, когда заданы правила изменения ее вектора скорости $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)$ как вектор-функции, зависящей только от координат точки $\vec{x}$.

Замечание 3. Сравните: αυτο - "сам"
νομοζ - "закон".
То есть собственная закономерность, определяемость какого-либо явления его внутренними закономерностями.
Название "автономная" применительно к СОДУ (1.1) подчеркивает отсутствие внешних воздействий - консервативность.



Каждое решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ АСОДУ (1.1), $t \in (\alpha,\ \beta)$, будем интерпретировать, как конкретное движение материальной точки в фазовом пространстве D.

Запись $\vec{x} = \vec{x}(t)$ будет означать, что геометрически данное движение представляется лежащей в D параметрически заданной гладкой *ориентированной* кривой $L: \vec{x} = \vec{x}(t)$, $t \in (\alpha,\ \beta)$.

$L: \vec{x} = \vec{x}(t)$ - не что иное, как проекция интегральной кривой $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ на фазовое пространство D, и называется ***фазовой траекторией*** (***траекторией***) АСОДУ (1.1).

На траектории указывают стрелкой ее ориентацию, т.е. направление движения по ней в сторону возрастания параметра t.

Наглядная интерпретация: траектория - это след движущейся точки (частицы), оставленный ей в фазовом пространстве.

Наблюдать траекторию в $\mathbb{R}^3$ доводилось каждому: конденсационный след за самолетом.

Определение. ***Фазовый портрет*** (***картина***) - совокупность фазовых траекторий в фазовом пространстве.

$\boxed{-}$ Знание фазовых траекторий дает меньше информации, чем знание интегральных кривых, однако фазовые картины (портреты) часто оказываются очень полезными, особенно при $n = 2$, а иногда и при $n = 3$.
При $n > 3$ наглядность теряется, но и здесь могут оказаться полезными геометрические соображения.
$\boxed{+}$ Большим достоинством фазового подхода является возможность изучать в целом (глобально) поведение свойств траекторий во всей области их определения, находить замкнутые траектории и т.п.

§2. Простейшие свойства фазовых траекторий АСОДУ (1).

Свойство 2.1.

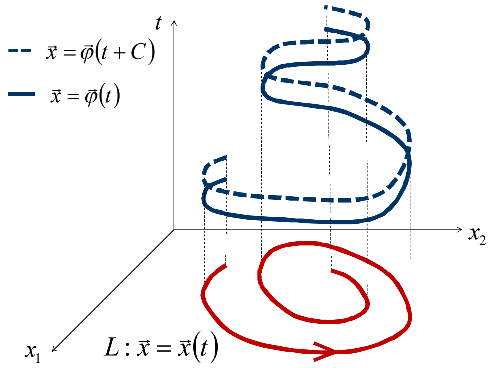
Если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение АСОДУ (1.1) при $t \in (\alpha,\ \beta)$, то $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + C)$, где $C = const$, также является решением (1.1) при $t \in (\alpha - C,\ \beta - C)$.

○ Непосредственной проверкой убеждаемся

$$\frac{d\vec{\varphi}(t+C)}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}(t+C)}{d(t+C)} \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(t+C)).$$

Т.о. все решения, полученные сдвигом по фазовой траектории, имеют одну и ту же фазовую траекторию (= самолет, пролетающий по тому же маршруту в другое время, оставит тот же след).●

Все интегральные кривые, получающиеся друг из друга переносом по тому же маршруту в другое время, оставят то же след.



Свойство 2.2.

Если две фазовые траектории $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$, $t\in I_1$ и $\vec{x}=\vec{\psi}(t)$, $t\in I_2$ АСОДУ (1.1) имеют общую точку $\vec{x}_0=\vec{\varphi}(t_1)=\vec{\psi}(t_2)$, то $\vec{\psi}(t)\equiv\vec{\varphi}(t+t_1-t_2)$ $\forall t$, для которых определены обе части тождества.

○ Из свойства 2.1 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t+C)$ решение АСОДУ (1.1), если $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ ее решение.

Пусть $C=t_1-t_2$ и $\vec{\chi}(t)=\vec{\varphi}(t+t_1-t_2)$ - решение (1.1).

$\vec{\chi}(t_2)=\vec{\varphi}(t_2+t_1-t_2)=\vec{\varphi}(t_1)=\vec{\psi}(t_2)$ - по условию.

По **теореме 1**. (существования и единственности) (лекция 15) $\vec{\chi}(t)\equiv\vec{\psi}(t)$, ч.т.д.●

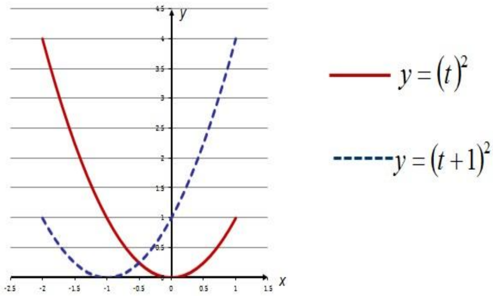
Таким образом, две фазовые траектории АСОДУ (1.1) либо не пересекаются, либо совпадают.

Для неавтономных систем это не так:

$$\begin{cases}\dot{x}=1,\\ \dot{y}=2t\end{cases}\text{ и }$$

$$\begin{cases}x=t+C_1,\\ y=t^2+C_2.\end{cases}$$

Откуда $y=(t+C_1)^2+C_2$.



Замечание 4. Из любой неавтономной СОДУ

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{f}(\vec{x})$$

можно стандартным образом получить АСОДУ, расширив ее фазовое пространство за счет независимой переменной: обозначив $t=x_{n+1}$.

$$\text{Тогда }\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{f}(\vec{x}),\\ \dfrac{d}{dt}x_{n+1}=1.\end{cases}$$

При этом $x_{n+1}(0)=0$.

Если последнее дополнительное ограничение на x_{n+1} убрать, то исходное значение независимой переменной (времени) будет восстанавливаться из новой (уже) автономной СОДУ с точностью до аддитивной постоянной - добавятся лишние решения, получающиеся из прежних временными сдвигами.

Следующие свойства, подытоженные теоремой, описывают возможные типы траекторий.

Определение. Точка $\vec{a}$ называется ***положением равновесия*** АСОДУ (1.1), если $\vec{f}(\vec{a})=0$.

Свойство 2.3.

Если $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (1.1), то $\vec{x}(t)=\vec{a}$ является решением АСОДУ (1.1).

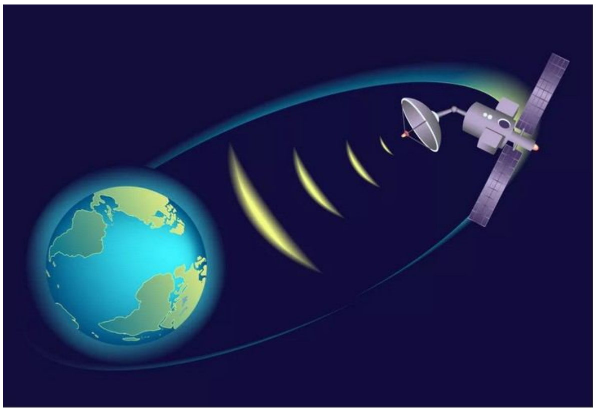
○ $\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{0}=\vec{f}(\vec{a})$,

таким образом, $\vec{x}(t)=\vec{a}$ фазовая траектория (1.1), состоящая из единственной точки.●

Замечание 5. Если $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (1.1), то в этой точке скорость $\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{0}$, что оправдывает название с кинематической точки зрения.

Замечание 6. Разночтения: положение равновесия,
точка покоя,
стационарная точка,
неподвижная точка,
особая точка (векторное поле не определено),
и т.д.

Замечание 7. При движении в фазовом пространстве D материальная точка находится в покое, постоянно пребывая в точке $\vec{a}\in D$ (фазового пространства). Пример: спутник, зависший над определенной точкой Земли.



Свойство 2.4.

Каждая фазовая траектория АСОДУ (1.1), отличная от положения равновесия, является гладкой кривой, т.е. в каждой точке имеется ненулевой касательный вектор.

○ Пусть $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ - решение АСОДУ (1.1).

$t_0 \in I$, $\vec{x}^0 = \vec{\varphi}(t_0) \in D$ и $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0$, т.е. точка $\vec{x}^0$ - не положение равновесия:

Касательный вектор в точке $\vec{x}^0$ равен $\left.\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}\right|_{t=t_0} = \vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0$.●

Свойство 2.5. (следствие **свойства 2.2**)

Фазовая траектория АСОДУ (1.1) не может войти в точку положения равновесия за конечное время.

○ Пусть $\vec{a}$ - положение равновесия.

По **свойству 2.3** $\vec{x}(t) = \vec{a}$ - решение АСОДУ (1.1).

Положим $\vec{\varphi}(t) = \vec{a}$.

$\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ - какое-либо решение АСОДУ (1.1).

① Если $\exists t_1$: $\vec{\psi}(t_1) = \vec{a}$, то $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ имеют общую точку и по **свойству 2.2** они совпадают.

② Если $\vec{\psi}(t) \neq \vec{a}$ $\forall t$, т.е. $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ не имеют общих точек, то за конечное время фазовая траектория, описываемая $\vec{\psi}(t)$, не может войти в положение равновесия.

Таким образом, решение $\vec{\psi}(t)$ может лишь приближаться к положению равновесия $\vec{a}$ при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.●

Определение. Число $T \neq 0$ называется ***периодом*** решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, АСОДУ (1.1) , если $\forall t \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t+T)$.

Свойство 2.6.

Если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение АСОДУ (1.1): $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$, $t_2 > t_1$,и $\vec{\varphi}(t) \equiv / \equiv const$ (т.е. не положение равновесия), то

❶ $\vec{\varphi}(t)$ - периодическое решение,

❷ у $\vec{\varphi}(t)$ существует наименьший положительный период, называемый ***главным*** периодом,

❸ фазовая траектория - замкнутая кривая без самопересечений.

○① $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t + t_2 - t_1)$ - решение (1.1) по **свойству 2.1**.

$\vec{\psi}(t_1) = |\textit{по построению}| = \vec{\varphi}(t_1 + t_2 - t_1) = \vec{\varphi}(t_2) = |\textit{по условию}| = \vec{\varphi}(t_1)$, следовательно, по **теореме 1**. (существования и единственности) (лекция 15) $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t)$.

Итак, $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + C)$, где $C = t_2 - t_1$, следовательно, $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t + C)$ и решение периодическое.

② Так как $\vec{\varphi}(t) \equiv / \equiv const$, то $\exists t^*$: $\vec{\varphi}(t^*) = \vec{\varphi}(t_1)$, т.е. $|\vec{\varphi}(t^*) - \vec{\varphi}(t_1)| = r > 0$.

$\vec{\varphi}(t)$ - непрерывная: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall t \in (t_1 - \delta,\ t_1 - \delta)$ $|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_1)| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = r$. Тогда $\forall t \in (t_1 - \delta,\ t_1 - \delta)$ $\vec{\varphi}(t) \neq \vec{\varphi}(t^*)$.

За период $T = C = t_2 - t_1 > 0$ решение должно пройти через все точки своей траектории, поэтому $T \geq 2\delta$.

И, следовательно, существует $\inf T = T^* \geq 2\delta$.

□ Покажем, что T^* - период от противного: допустим, что T^* не является периодом.

Построим последовательность периодов $\{T_i\}_i^{\infty}$: $T_i > 0$[1]. $T_i \xrightarrow[i\to\infty]{} T^* + 0$, $\vec{\varphi}(t+T_i) \equiv \vec{\varphi}(t)$.

Переходя к пределу и в силу непрерывности, получим $\vec{\varphi}(t+T^*) \equiv \vec{\varphi}(t)$ - противоречие.

В силу полученного противоречия T^* - период.■

③ Траектория $\vec{\varphi}(t)$, $t \in [0,\ T^*]$ - замкнутая кривая, т.к. $\vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(T^*)$.

Тот факт, что она без самопересечений докажем от противного.

□ Допустим, что $\exists t_3,\ t_4 \in [0,\ T^*]$: $t_3 \neq t_4$, а $\vec{\varphi}(t_3) = \vec{\varphi}(t_4)$.

По доказанному выше существует период $T_C = |t_3 - t_4| > 0$ и при этом $T_C \leq T^*$.

Но T^* - наименьший (положительный) период.

Следовательно, у кривой $\vec{\varphi}(t)$ не может быть самопересечений.■

●

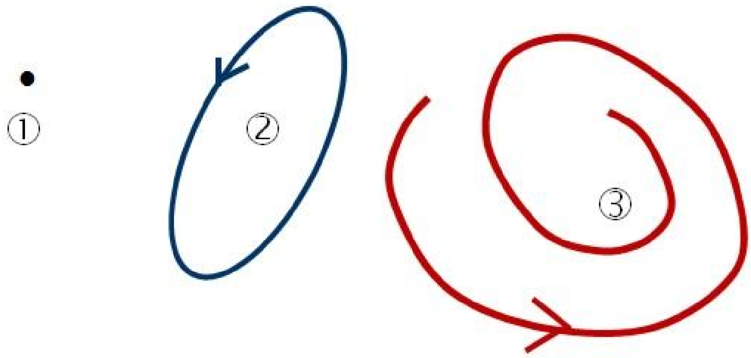
Теорема 2.1. (О фазовых траекториях АСОДУ (1.1))

Всякая фазовая траектория АСОДУ (1.1) принадлежит к одному из трех типов:

① положение равновесия,

② замкнутая траектория,

③ траектория без самопересечений.



[1] Знак ">" не принципиален. Если T - период, то $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t+T)$; при $t_1 = t - T$: $\vec{\varphi}(t-T) = \vec{\varphi}(t)$, и, следовательно, $(-T)$ - период.