Гл. VIII. Нормальные автономные системы ОДУ.

§2. Простейшие свойства фазовых траекторий АСОДУ (1).

Свойство 2.6.

Если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение АСОДУ (1.1): $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$, $t_2 > t_1$,и $\vec{\varphi}(t) \equiv / \equiv const$ (т.е. не положение равновесия), то

❶ $\vec{\varphi}(t)$ - периодическое решение,

❷ у $\vec{\varphi}(t)$ существует наименьший положительный период, называемый ***главным*** периодом,

❸ фазовая траектория - замкнутая кривая без самопересечений.

○① $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t + t_2 - t_1)$ - решение (1.1) по **свойству 2.1**.

$\vec{\psi}(t_1) = |\textit{по построению}| = \vec{\varphi}(t_1 + t_2 - t_1) = \vec{\varphi}(t_2) = |\textit{по условию}| = \vec{\varphi}(t_1)$, следовательно, по **теореме 1**. (существования и единственности) (лекция 15) $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t)$.

Итак, $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + C)$, где $C = t_2 - t_1$, следовательно, $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t + C)$ и решение периодическое.

② Так как $\vec{\varphi}(t) \equiv / \equiv const$, то $\exists t^*$: $\vec{\varphi}(t^*) = \vec{\varphi}(t_1)$, т.е. $|\vec{\varphi}(t^*) - \vec{\varphi}(t_1)| = r > 0$.

$\vec{\varphi}(t)$ - непрерывная: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall t \in (t_1 - \delta,\ t_1 - \delta)$ $|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_1)| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = r$. Тогда $\forall t \in (t_1 - \delta,\ t_1 - \delta)$ $\vec{\varphi}(t) \neq \vec{\varphi}(t^*)$.

За период $T = C = t_2 - t_1 > 0$ решение должно пройти через все точки своей траектории, поэтому $T \geq 2\delta$.

И, следовательно, существует $\inf T = T^* \geq 2\delta$.

☐ Покажем, что T^* - период от противного: допустим, что T^* не является периодом.

Построим последовательность периодов $\{T_i\}_i^\infty$: $T_i > 0$[1]. $T_i \xrightarrow[i\to\infty]{} T^* + 0$, $\vec{\varphi}(t + T_i) \equiv \vec{\varphi}(t)$.

Переходя к пределу и в силу непрерывности, получим $\vec{\varphi}(t + T^*) \equiv \vec{\varphi}(t)$ - противоречие.

В силу полученного противоречия T^* - период.■

③ Траектория $\vec{\varphi}(t)$, $t \in [0,\ T^*]$ - замкнутая кривая, т.к. $\vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(T^*)$.

Тот факт, что она без самопересечений докажем от противного.

☐ Допустим, что $\exists t_3,\ t_4 \in [0,\ T^*]$: $t_3 \neq t_4$, а $\vec{\varphi}(t_3) = \vec{\varphi}(t_4)$.

По доказанному выше существует период $T_C = |t_3 - t_4| > 0$ и при этом $T_C \leq T^*$.

Но T^* - наименьший (положительный) период.

Следовательно, у кривой $\vec{\varphi}(t)$ не может быть самопересечений.■

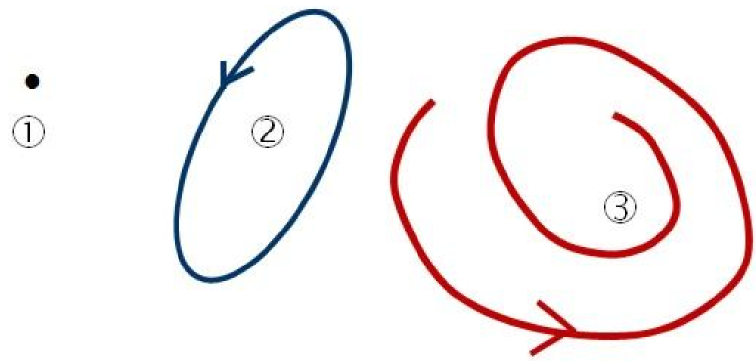
●

Теорема 2.1. (О фазовых траекториях АСОДУ (1.1))

---

[1] Знак ">" не принципиален. Если T - период, то $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t + T)$; при $t_1 = t - T$: $\vec{\varphi}(t - T) = \vec{\varphi}(t)$, и, следовательно, $(-T)$ - период.

Всякая фазовая траектория АСОДУ (1.1) принадлежит к одному из трех типов:
① положение равновесия,
② замкнутая траектория,
③ траектория без самопересечений.



§3. Устойчивость положений равновесия.

АСОДУ

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{f}(\vec{x}), \qquad (3.1)$$

рассматривается в предположении, что $\vec{f}(\vec{x})\in C^1(D)$, $D\in\mathbb{R}^n$, D - фазовое пространство.

Лемма 3.1.(о параметрическом представлении)

Пусть $f_n(\vec{x}_0)\neq 0$.

Тогда решение задачи Коши для (3.1) с начальным условием

$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$

дает в некоторой окрестности точки $t=t_0$ параметрическое представление решения

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{f_i(\vec{x}_0)}{f_n(\vec{x}_0)},\ i=\overline{1,\,n-1} \qquad (3.2)$$

с начальными условиями

$x_i(x_{0n})=x_{0i}$, $i=\overline{1,\,n-1}$.

○ Из последнего ДУ АСОДУ (3.1) видно, что $\dot{x}_n(t_0)\neq 0$.

По непрерывности $\dot{x}_n(t)$ сохраняет знак вблизи точки $t=t_0$, таким образом, $x_n=x_n(t)$.

Но тогда существует обратная функция $t=t(x_n)$, определенная в некоторой окрестности точки x_{0n}.

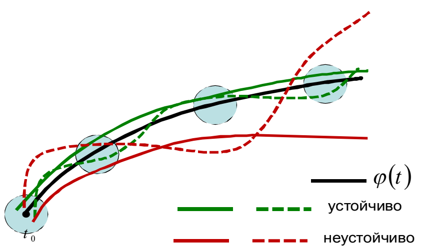
Суперпозиция $x_i=x_i(t(x_{0n}))$, $i=\overline{1,\,n-1}$, является решением задачи Коши для (3.2).●

Аналогично доказывается случай $f_k(\vec{x}_0)\neq 0$, $k=\overline{1,\,n-1}$.

Интегральная кривая- график решения.

Определение. Траекторию АСОДУ (3.1), не являющуюся положением равновесия, будем называть ***интегральной кривой*** (3.2) (а также для случаев при $f_k(\vec{x}_0)$, $k=\overline{1,\,n-1}$).

Понятие устойчивости: интегральная кривая, обладающая тем свойством, что все достаточно близкие к ней при $t=t_0$ интегральные кривые остаются близкими к ней при $t>t_0$, называется ***устойчивой интегральной кривой***, а соответствующее ей решение - ***устойчивым решением***. В противном случае говорят, что решение ***неустойчиво***.



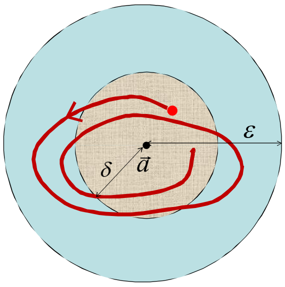
Замечание 3.1. Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора начального момента t_0.

Определение. Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ АСОДУ (3.1) называется устойчивым по Ляпунову, если

① $\exists \delta_0 > 0: \ \forall \vec{x}_0^{\,*}: \ \left|\vec{x}_0^{\,*} - \vec{x}_0\right| < \delta_0$ решение (3.1) существует на всей полуоси $[t_0, +\infty)$;

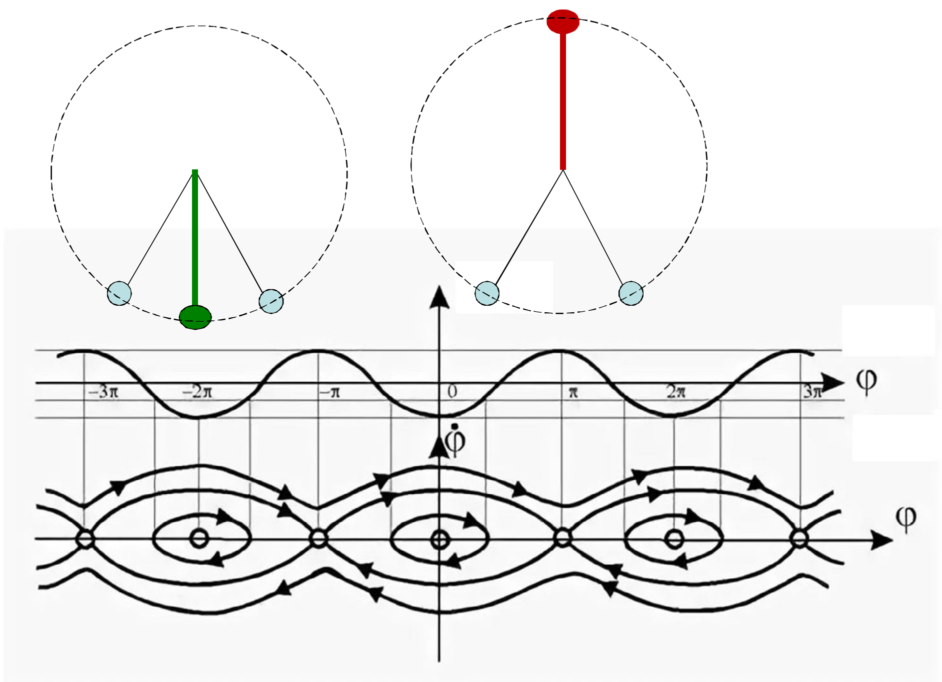
② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \left|\vec{x}_0^{\,*} - \vec{x}_0\right| < \delta \rightarrow \left|\vec{x}(t, \vec{x}_0^{\,*}) - \vec{x}(t, \vec{x}_0)\right| < \varepsilon \ \ \forall t \in [t_0, +\infty)$.

Заменив $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ на $\vec{x} = \vec{a}$ - положение равновесия (3.1) получим определение устойчивости по Ляпунову для АСОДУ.



Итак: Положение равновесия $\vec{a}$ устойчиво по Ляпунову, если для любой его окрестности $\overset{o}{U}_\varepsilon(\vec{a})$ можно указать такую его окрестность $\overset{o}{U}_\delta(\vec{a})$, что любое движение, начинающееся в $\overset{o}{U}_\delta(\vec{a})$ не покинет $\overset{o}{U}_\varepsilon(\vec{a})$.

Пример 3.1. Нижнее/верхнее вертикальное положение (математического) маятника.
□

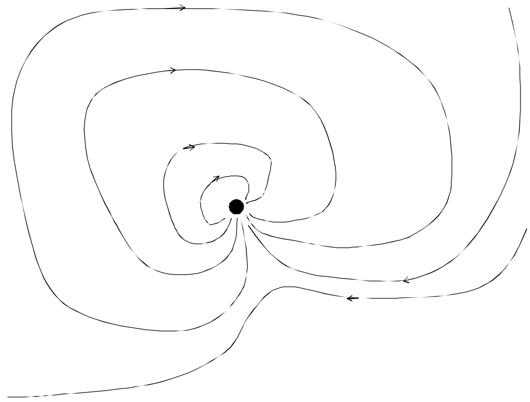


■

Определение. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $\vec{x} = \vec{a}$ называется ***асимптотически устойчивым***, если оно

| ① устойчиво по Ляпунову,
| ②. $\exists \delta^* > 0$: $\forall \vec{x}(t)$: $|\vec{x}(t_0) - \vec{a}| < \delta^*$ $\lim\limits_{t\to+\infty} (\vec{x}(t_0) - \vec{a}) = \vec{0}$.

Замечание 3.2. Может показаться, что требование устойчивости по Ляпунову излишне. Но! Оно не вытекает автоматически из асимптотической устойчивости (см. рис.) - все траектории сходятся к положению равновесия, но устойчивости нет.



<u>**Первый метод Ляпунова**</u>: исследование устойчивости положения равновесия АСОДУ (3.1)

Заключение об устойчивости (в этом методе) делается на основе изучения поведения фазовых траекторий.

Вблизи положения равновесия нелинейную АСОДУ (3.1) можно заменить линейной АСОДУ - линейным приближением к исходной АСОДУ (3.1)

$\vec{a}$ - положение равновесия (3.1), т.е. $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$.

Перейдем к новой неизвестной функции $\vec{z} = \vec{x} - \vec{a}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z} + \vec{a}) = \vec{f}(\vec{a}) + A\vec{z} + R(\vec{z}),$$

где $A = \left(\dfrac{\partial f_i(\vec{a})}{\partial x_j} \right)$, $ij, = \overline{1, n-1}$ - матрица Якоби, $R(\vec{z}) = o(|\vec{z}|)$ при $\vec{z} \to \vec{0}$.

Если вблизи точки $\vec{z} = \vec{0}$ пренебречь малой нелинейной добавкой $R(\vec{z})$, то получим линейную АСОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = A\vec{z}. \qquad (3.3)$$

ЛФСОДУ (3.3) - линейное приближение к (3.1),
первое приближение к (3.1).

Задача: выяснить условия, при которых по устойчивости положения равновесия (3.3) $\vec{z} = \vec{0}$ можно судить об устойчивости положения равновесия (3.1) $\vec{x} = \vec{a}$.

Оказывается информацию об устойчивости или неустойчивости $\vec{z} = \vec{0}$ для (3.3) можно получить, рассматривая спектр матрицы A.

Теорема 3.1. (достаточные условия устойчивости/неустойчивости)

| Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то $\vec{z} = \vec{0}$ является асимптотически устойчивым положением равновесия ЛАСОДУ (3.3).

Если же хоть одно собственное значение A имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $\vec{z} = \vec{0}$ ЛАСОДУ (3.3) неустойчиво (по Ляпунову).

○① $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$.

$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$, $\vec{v}_k \neq \vec{0}$, $k = \overline{1,\, n}$.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_k < -\alpha$, $k = \overline{1,\, n}$, где $\alpha > 0$.

Разложим решение (3.2) $\vec{z}$ по базису из собственных векторов A, если такого базиса не существует, то строим жорданову цепочку и раскладываем по жорданову базису $\vec{h}_l$, $l = \overline{1,\, n}$: - в общем случае $\vec{z}(t,\, \vec{z}_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_m^{(k)} \vec{h}_k e^{\lambda_k t}$. Здесь λ_k могут совпадать, $m \le n$.

$$\left|\vec{z}(t,\, \vec{z}_0)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{h}_k P_m^{(k)} e^{\lambda_k t}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{h}_k P_m^{(k)}\right| \left|e^{(\lambda_k+\alpha)t}\right| e^{-\alpha r}$$

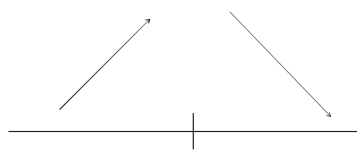
$$\left|e^{(\lambda_k+\alpha)t}\right| = \left|e^{\operatorname{Re}(\lambda_k+\alpha)t} e^{i\operatorname{Im}\lambda_k t}\right| = e^{(\operatorname{Re}\lambda_k+\alpha)t}\left|e^{i\operatorname{Im}\lambda_k t}\right| = e^{(\operatorname{Re}\lambda_k+\alpha)t}.$$

$\operatorname{Re}\lambda_k + \alpha < 0$, $k = \overline{1,\, n}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_k + \alpha \le -\beta < 0$.

Оценим $g(t) = t^m e^{-\beta t}$:

$$g'(t) = mt^{m-1}e^{-\beta t} - \beta t^m e^{-\beta t} = (m - \beta t)t^{m-1}e^{-\beta t}.$$

$$g'(t) = 0 \text{ при } t = \frac{m}{\beta}.$$



$t = \dfrac{m}{\beta}$

Следовательно, $\exists C > 0$:

$$\left|t^m e^{(\lambda_k+\alpha)t}\right| \le Ce^{(\operatorname{Re}\lambda_k+\alpha)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,\; C = \left(\frac{m}{\beta}\right)^m.$$

При $t > 1$ $\left|P_m^{(k)}\right| \le \sum\limits_{j=0}^{m} t^j \left|a_{m-j}^{(k)}\right| \le \max\limits_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \sum\limits_{j=0}^{m} t^j \le \max\limits_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| mt^m$.

Тогда $\left|\vec{z}(t,\, \vec{z}_0)\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k P_m^{(k)} e^{\lambda_k t}\right| = \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right|\left|P_m^{(k)}\right|\left|e^{\operatorname{Re}\lambda_k t}e^{i\operatorname{Im}\lambda_k t}\right| = \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right|\left|P_m^{(k)}\right|e^{\operatorname{Re}\lambda_k t} \le$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right| \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| mt^m e^{\operatorname{Re}\lambda_k t} \le \max_k \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \cdot \sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right| mt^m e^{\operatorname{Re}\lambda_k t} \le$$

$$\le \max_k \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \cdot \sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right| mt^m e^{(\operatorname{Re}\lambda_k+\alpha)t} \cdot e^{-\alpha t} \le \max_k \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \cdot e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right| mt^m e^{-\beta t} \le$$

$$\le \max_k \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \cdot e^{-\alpha t} n\left(t^n e^{-\beta t}\right)\sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right| \le \max_k \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \cdot e^{-\alpha t} n\left(\frac{n}{\beta}\right)^n \sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right| \le$$

$$\le C_1 \cdot e^{-\alpha t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

$$C_1 = \max_k \max_{m-j}\left|a_{m-j}^{(k)}\right| \cdot n\left(\frac{n}{\beta}\right)^n \sum_{k=1}^{n}\left|\vec{h}_k\right|.$$

Отсюда следует, что и $\left|P_m^{(k)} e^{\lambda_k t}\right|$ - ограниченные функции на $[0,\, +\infty)$.

Рассмотрим теперь фундаментальную матрицу (3.3) $Y^*(t)$, удовлетворяющую условию $Y^*(0) = E$.

В силу выше изложенного найдется $M_\alpha = const > 0$: $\left\| Y^*(t) \right\| \le M_\alpha e^{-\alpha t}$.

При этом $\vec{z}(t, \vec{z}_0) = Y^*(t)\vec{z}_0$, откуда $\left| \vec{z}(t, \vec{z}_0) \right| \le M_\alpha \left| \vec{z}_0 \right|$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{M_\alpha} > 0 \;\; \left\| \vec{z}_0 \right\| < \delta \;\; \rightarrow \;\; \left\| \vec{z}(t, \vec{z}_0) \right\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$, т.е. решение устойчиво (по Ляпунову).

А так как $\left| \vec{z}(t, \vec{z}_0) \right| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$, то оно асимптотически устойчиво.

② Пусть теперь $\exists l$: $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, $\vec{v}_l$ - соответствующий собственный вектор.

Выберем $\vec{z}_0 = \beta \vec{v}_l$, $\vec{z} = \beta \vec{v}_l e^{\lambda_l t}$, $\operatorname{Re} \vec{z} = \beta \vec{v}_l e^{\operatorname{Re} \lambda_l t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_l t)$.

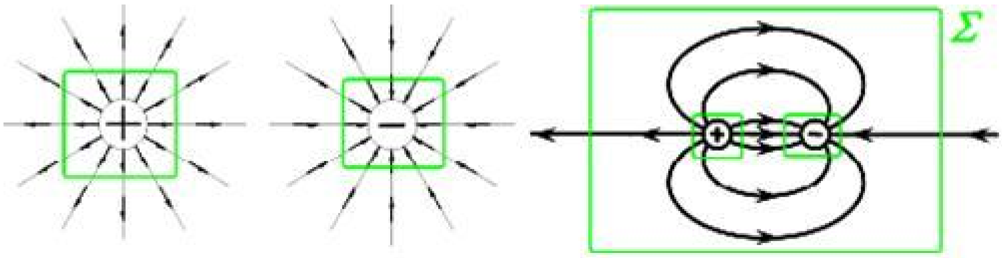
При $\operatorname{Im} \lambda_l = 0$ имеем $\vec{z} = \beta \vec{v}_l e^{\lambda_l t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$.

Рассмотрим теперь при $\operatorname{Im} \lambda_l \ne 0$ точки $t_p = \dfrac{2\pi p}{\operatorname{Im} \lambda_l}$.

$\operatorname{Re} \vec{z}(t_p) = \beta \vec{v}_l e^{\operatorname{Re} \lambda_l t_p} \xrightarrow[p \to \infty]{} \infty$ для $\forall \beta$ сколь угодно малых.

Следовательно, положение равновесия $\vec{z} = \vec{0}$ ЛФСОДУ (3.3) не является устойчивым.●

Гидродинамическая интерпретация:
ТРАЕКТОРИЯ - след движущейся частицы,
УСТОЙЧИВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ - сток,
НЕУСТОЙЧИВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ - источник.



Источник Сток Суммарный поток