Лекция 22 (7).

Гл. VIII. Нормальные автономные системы ОДУ.

§3. Устойчивость положений равновесия.

АСОДУ

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{f}(\vec{x}), \qquad (3.1)$$

рассматривается в предположении, что $\vec{f}(\vec{x})\in C^1(D)$, $D\in\mathbb{R}^n$, D - фазовое пространство.

Теорема 3.2. (Ляпунова об устойчивости по первому приближению)

Если все собственные значения матрицы $A=\left(\dfrac{\partial f_i(\vec{a})}{\partial x_j}\right)$, где $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (3.1), $\vec{f}(\vec{x})\in C^2(D)$, имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия $\vec{x}=\vec{a}$ является асимптотически устойчивым.

Если хоть одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $\vec{x}=\vec{a}$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство в курс не входит.

См. 🕮 Понтрягин,

🕮 Федорюк.

Замечание 3.3. Условия теоремы являются ДОСТАТОЧНЫМИ, т.е. в случае $\operatorname{Re}\lambda<0$[1] $\forall\lambda$ или $\exists\lambda$: $\operatorname{Re}\lambda>0$ ВОЗМОЖНО исследование по первому (линейному приближению):

каких-либо дополнительных исследований можно не проводить, чтобы сделать вывод о поведении фазовых траекторий исходной нелинейной системы.

Замечание 3.4. Если $\exists\lambda$: $\operatorname{Re}\lambda=0$, то исследование по линейному приближению НЕСОСТОЯТЕЛЬНО:

требутся дополнительное исследование с помощью функции Ляпунова.

<u>**Второй метод Ляпунова**</u> - метод функций Ляпунова (прямой метод Ляпунова).

Определение. Функция $V(\vec{x})$, $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, заданная в $U_\rho(\vec{a})$, где $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (3.1), называется ***положительно определенной*** в $\overset{o}{U}_\rho(\vec{a})$, если

❶ $V(\vec{a})=0$,

❷ $V(\vec{x})>0\ \ \forall\vec{x}\in\overset{o}{U}_\rho(\vec{a})$.

---

[1] λ - корень характеристического цравнения $|A-\lambda E|=0$.

Функция $W(\vec{x})$, $W:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная в $U_\rho(\vec{a})$, где $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (3.1), называется ***отрицательно определенной*** в $\overset{o}{U}_\rho(\vec{a})$, если функция $(-W(\vec{x}))$ является положительно определенной в $\overset{o}{U}_\rho(\vec{a})$.

Пример 3.2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V(\vec{x}) = x^2 + y^4 + z^6 > 0$ в $\overset{o}{U}_\rho(\vec{0})$.

Определение. Пусть $V(\vec{x}) \in C^1(U_\rho(\vec{a}))$.

Производной функции $V(\vec{x})$ ***в силу АСОДУ*** (3.1) называется функция $\overset{\bullet}{V}(\vec{x}) = (\nabla V,\ \vec{f}(\vec{x})) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{x})$.

Пусть $\vec{x} = \vec{x}(t)$ - решение (3.1).

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}) = \frac{d}{dt}V(\vec{x}(t)) = \left(\nabla V(\vec{x}), \frac{d}{dt}\vec{x}(t)\right) = (\nabla V,\ \vec{f}(\vec{x})).$$

Таким образом, $\frac{d}{dt}V(\vec{x})$ - производная вдоль траектории (3.1).

Замечание 3.5. Производную функции $V(\vec{x})$ силу системы (3.1) можно назвать также производной этой функции ***по направлению векторного поля*** $\vec{f}(\vec{x})$.

Это понятие является обобщением известного из математического анализа понятия производной по направлению $\vec{l}$: $\frac{\partial V}{\partial \vec{l}} = (\nabla V, \vec{l})$.

В $\frac{d}{dt}V(\vec{x})$ учитывается не только ❶ направление вектора $\vec{f}(\vec{x})$, но и ❷ его длина.

В групповом анализе $\frac{d}{dt}V(\vec{x})$ - производная Ли.

Определение. Пусть $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (3.1).

$V(\vec{x}) \in C^1(U_\rho(\vec{a}))$ называется ***функцией Ляпунова***, если

① $V(\vec{x})$ - положительно определена,

② $\frac{d}{dt}V(\vec{x}) \le 0 \ \ \forall \vec{x} \in \overset{o}{U}_\rho(\vec{a})$,

$\frac{d}{dt}V(\vec{x})$ - производная в силу АСОДУ (3.1).

Замечание 3.6. Если $\frac{d}{dt}V(\vec{x})<0$, то $V(\vec{x})$ - ***строгая функция Ляпунова***.

Теорема 3.3. (Ляпунова об устойчивости)

> Пусть в окрестности положения равновесия АСОДУ (3.1) существует функция Ляпунова.
> Тогда это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Доказательство в курс не входит.

См. 🕮 Федорюк, гл. 4 § 6,
🕮 Треногин, гл. IV, § 9.

Теорема 3.4. (об асимптотической устойчивости)

> Пусть в окрестности положения равновесия АСОДУ (3.1) существует строгая функция Ляпунова.
> Тогда это положение равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство в курс не входит.

См. 🕮 Федорюк, гл. 4 § 6,
🕮 Треногин, гл. IV, § 9.

Пример 3.3. Исследовать положения равновесия $\begin{cases} \dot{x} = & -x^3+y^2, \\ \dot{y} = & -y^5-xy. \end{cases}$.

☐ Из $\begin{cases} -x^3+y^2 = & 0, \\ -y^5-xy = & 0 \end{cases}$ находим, что положение равновесия $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

$$A=\left(\frac{\partial f_i(\vec{a})}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix}-3x^2 & 2y\\ -y & -5y^4-x\end{pmatrix}_{\substack{x=0\\y=0}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

☹Теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима.

Покажем, что $V(x,\ y)=x^2+y^2$ - строгая функция Ляпунова:

$$\frac{d}{dt}V(x,\ y)=2x\cdot\left(-x^3+y^2\right)+2y\cdot\left(-y^5-xy\right)=-2x^4-2y^6<0$$

⇨ положение равновесия $(0,\ 0)$ асимптотически устойчиво.■

Доказательство неустойчивости положения равновесия $\vec{x}=\vec{a}$ АСОДУ (3.1) основано на использовании специальной функции, называемой функцией Четаева.

Определение. Пусть $V(\vec{x})\in C^1\left(U_\rho(\vec{a})\right)$, $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (3.1).

> Пусть $\exists G\in U_\rho(\vec{a})$: $\vec{a}\in\partial G$.
> Функция $V(\vec{x})$ называется функцией Четаева АСОДУ (3.1), если
> ① $V(\vec{x})>0\ \ \forall\vec{x}\in G$,
> ② $\frac{d}{dt}V(\vec{x})>0\ \ \forall\vec{x}\in G$,
> $\frac{d}{dt}V(\vec{x})$ - производная в силу АСОДУ (3.1).

Теорема 3.5. (Четаева)

> Если в $U_\rho(\vec{a})$, где $\vec{a}$ - положение равновесия АСОДУ (3.1), существует функция Четаева, то это положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство в курс не входит.

См. 🕮 Федорюк, гл. 4 § 6,
🕮 Треногин, гл. IV, § 9.

Пример 3.4. Исследовать положения равновесия $\begin{cases} \dot{x} = & y + xy^2, \\ \dot{y} = & -x + x^2 y. \end{cases}$

□Из $\begin{cases} y + xy^2 & = 0, \\ -x + x^2 y & = 0 \end{cases}$ находим, что положение равновесия $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$A = \left(\frac{\partial f_i(\vec{a})}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} y^2 & 1 + 2xy \\ -1 + 2xy & x^2 \end{pmatrix}_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $0 = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.

Собственные числа A $\lambda_{1,\,2} = \pm i$.

☹Теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима.

$V(x,\ y) = x^2 + y^2$ - положительно определена.

$$\frac{d}{dt} V(x,\ y) = 2x \cdot \left(y + xy^2\right) + 2y \cdot \left(-x + x^2 y.\right) = 4x^2 y^2.$$

$G\left\{(x,\ y) \in U_\rho(\vec{0}) : x > 0,\ y > 0\right\}$, тогда $(0,\ 0) \in \partial G$

и по **теореме 3.5** положение равновесия неустойчиво.■

Замечание 3.7. Построение функции Ляпунова (или Четаева) в конкретной ситуации может оказаться трудной задачей.

Причина заключается в отсутствии общего алгоритма нахождения этих функций.

§4. Классификация положений равновесия ЛАСОДУ 2-го порядка.

Рассмотрим ЛАСОДУ

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}, \tag{4.1}$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = const$, $i,\ j = \overline{1,\ 2}$.

Если $\det A \neq 0$, то $\vec{x} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является единственным положением равновесия ЛАСОДУ (4.1).

В данном параграфе обсудим

- основные типы положений равновесия ЛАСОДУ (4.1) и
- приведем соответствующие фазовые портреты.

Напомним, что информацию об устойчивости/неустойчивости положения равновесия можно получить исследуя спектр матрицы A:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}, \tag{4.2}$$

(4.2) - характеристическое уравнение (4.1)

Впервые подробное исследование было проведено в магистерской диссертации Николая Егоровича Жуковского (1847-1921) - будущего "отца русской авиации".

Соответствующая терминология принадлежит Анри Пуанкаре (1854-1912).

Так как коэффициенты характеристического уравнения вещественны, то нам могут представиться 4 случая:

собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A:

I. действительные и различные,
II. комплексно-сопряженные,
III. совпадают (но отличны от нуля);
IV. вырожденный случай.

$\boxed{\text{I.}}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, т.е. $\det A \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$, $j = \overline{1,\ 2}$ - матрица A имеет два различных вещественных значения.

$A\vec{h}_j = \lambda_j \vec{h}_j$, $j = \overline{1,\ 2}$, $\vec{h}_j$ - соответствующие собственные векторы.

$\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ лишь случайно могут оказаться ортогональными, поэтому декартова система координат $\{O,\ \vec{h}_1,\ \vec{h}_2\}$, вообще говор, является <u>косоугольной</u>.

Решение (4.1) имеет вид

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{4.3}$$

или

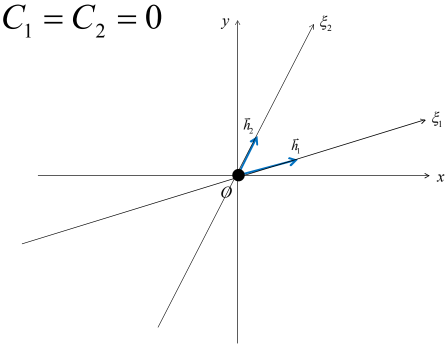
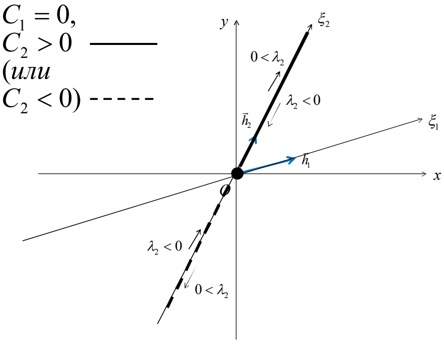
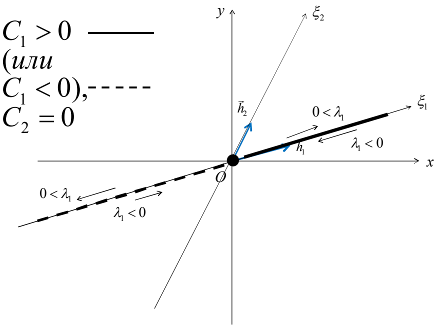
$$\vec{x}(t) = \xi_1(t)\vec{h}_1 + \xi_2(t)\vec{h}_2, \tag{4.3а}$$

где

$$\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t},\ \xi_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}\ - \tag{4.3б}$$

- координаты решения в базисе из собственных векторов матрицы A, т.е. в косоугольной системе координат $\{O,\ \vec{h}_1,\ \vec{h}_2\}$,

C_1, C_2 - произвольные постоянные.

❶	$C_1 = C_2 = 0$	- траектории вырождаются в точку $O(0,\,0)$ - положение равновесия	$C_1 = C_2 = 0$ 
❷	$C_1 = 0,$ $C_2 > 0$ (*или* $C_2 < 0$)	- траекторией является положительная (отрицательная) полуось $O\xi_2$	$C_1 = 0,$ $C_2 > 0$ ——— (*или* $C_2 < 0$) - - - - - 
❸	$C_1 > 0$ (*или* $C_1 < 0$), $C_2 = 0$	аналогично, - траекторией является положительная (отрицательная) полуось $O\xi_1$	$C_1 > 0$ ——— (*или* $C_1 < 0$),- - - - - $C_2 = 0$ 

❹ $C_1 \neq 0$ $C_2 \neq 0$ получить уравнения всех траекторий можно, исключив из равенств (4.3б) переменную t.

Поскольку $\left(\dfrac{\xi_1(t)}{C_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = e^t$ и $\left(\dfrac{\xi_2(t)}{C_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = e^t$, то уравнением траекторий[2] будет

$$\left(\frac{\xi_1(t)}{C_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = \left(\frac{\xi_2(t)}{C_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}$$

или

$$\xi_1 = C\xi_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},\ \text{где}\ C = C_1\left(\frac{1}{C_2}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

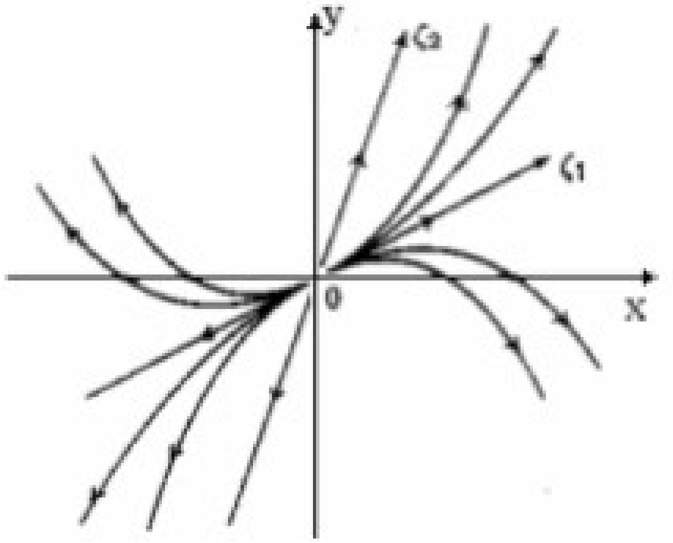
Замечание 4.1. За конечное время ни войти, ни выйти из положения равновесия не можем.

Замечание 4.2. Направление движения при $t \to \infty$ на фазовой траектории отмечаем стрелочками.

[2] ✇ за исключением ❶ положения равновесия и ❷ полуосей

Рассмотрим теперь конкретные подслучаи.

<u>I.1</u> $0<\lambda_1<\lambda_2$ - положение равновесия **УЗЕЛ**: неустойчиво (**теорема 3.1** лекция 21).



ξ_1 растет медленнее ξ_2 при удалении от положения равновесия $\boxed{!}$ на <u>каждой</u> траектории, включая полуоси.

траектории - параболы степени $\alpha=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$0<\alpha<1$ - траектории "прижимаются" к оси $O\xi_1$ (той, у которой абсолютная величина собственного значения меньше).

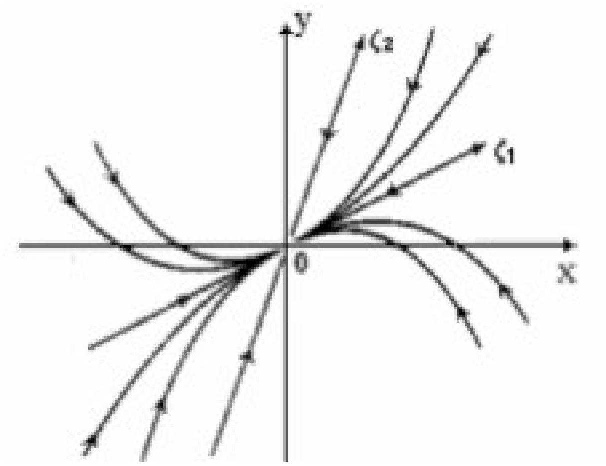
Гидродинамическая интерпретация: источник.

<u>I.2</u> $\lambda_2<\lambda_1<0$ - положение равновесия **УЗЕЛ**: устойчиво по Ляпунову.

Аналогично предыдущему случаю траектории - параболы степени $\alpha=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$0<\alpha<1$ - траектории "прижимаются" к оси $O\xi_1$ (той, у которой абсолютная величина собственного значения меньше).

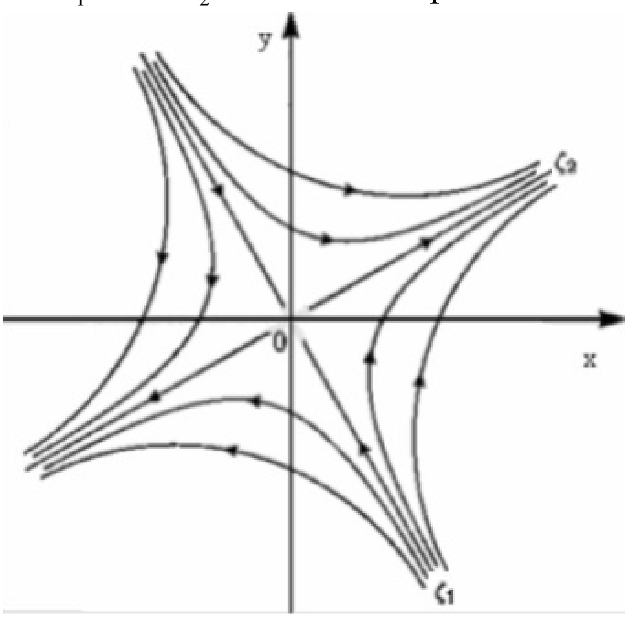
Единственное отличие от случая I.1 - направление движения вдоль траектории: теперь стрелки должны быть направлены **к** положению равновесия.



Движение монотонно затухающее.

Гидродинамическая интерпретация: сток.

I.3 $\lambda_1<0<\lambda_2$ - положение равновесия **СЕДЛО**: неустойчиво.



❶ Траектория $\xi_2=0$ $(C_2=0)$: приближаемся к $O(0,0)$ вдоль положительной/отрицательной полуоси $O\xi_1$.

❷ Траектория $\xi_1=0$ $(C_1=0)$: приближаемся к $O(0,0)$ вдоль положительной/отрицательной полуоси $O\xi_2$.

Уравнение траекторий при $C_1\cdot C_2\neq 0$ удобно записать в виде

$$\left(\frac{\xi_1(t)}{C_1}\right)^{-\frac{1}{\lambda_1}}\cdot\left(\frac{\xi_2(t)}{C_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}=1.$$

Рассмотрим 1-ый квадрант: $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$.

$\xi_1^{\,p_1} \cdot \xi_2^{\,p_2} = C$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ - гиперболообразная кривая с асимптотами $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$.

Траектории $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ называют ***сепаратрисами***:

$\xi_1 = 0$ - устойчивый ***ус***,

$\xi_2 = 0$ - неустойчивый ус.

По одним траекториям точка экспоненциально быстро стремится войти в положение равновесия, по другим - выйти.

Замечание 4.3. "Усы" седла можно найти из $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{22}y}$, учитывая, что $x = ky$:

$$k = \frac{a_{11}k + a_{12}}{a_{21}k + a_{22}}.$$

$\boxed{\text{II.}}$ $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$[3], $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$.

$\vec{h}_{1,\,2} = \vec{u} \pm i\vec{v}$.

При $j = \overline{1,\,2}$ рассмотрим

$$e^{\lambda_j t}\vec{h}_j = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i\sin\beta t)(\vec{u} \pm i\vec{v}) = e^{\alpha t}\left[(\cos\beta t \cdot \vec{u} - \sin\beta t \cdot \vec{v}) \pm i(\sin\beta t \cdot \vec{u} + \cos\beta t \cdot \vec{v})\right].$$

Таким образом,

$$\vec{x}(t) = C_1 \operatorname{Re}\left(\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}\right) + C_2 \operatorname{Im}\left(\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}\right) =$$

$$= C_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t \cdot \vec{u} - \sin\beta t \cdot \vec{v}) + C_2 e^{\alpha t}(\sin\beta t \cdot \vec{u} + \cos\beta t \cdot \vec{v}) =$$

$$= e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)\vec{u} + e^{\alpha t}(C_2\cos\beta t - C_1\sin\beta t)\vec{v} =$$

$$= e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\left[\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}}\cos\beta t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}}\sin\beta t\right)\vec{u} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}}\cos\beta t - \frac{C_1}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}}\sin\beta t\right)\vec{v}\right] = \left| \begin{array}{l} \cos\gamma = \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}} \\ \sin\gamma = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}} \end{array} \right| =$$

$$= e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\left[(\cos\gamma\cos\beta t + \sin\gamma\sin\beta t)\vec{u} + (\sin\gamma\cos\beta t - \cos\gamma\sin\beta t)\vec{v}\right] =$$

$$= e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\left[\cos(\gamma - \beta t)\vec{u} + \sin(\gamma - \beta t)\vec{v}\right] = \xi_1\vec{u} + \xi_2\vec{v},$$

где $\xi_1 = e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\cos(\gamma - \beta t)$, $\xi_2 = e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\sin(\gamma - \beta t)$ координаты решения в системе координат $\{O,\, \vec{u},\, \vec{v}\}$.

При $\beta > 0$ с ростом времени движение происходит по часовой стрелке,

против при $\beta < 0$, если угол кратчайшего поворота от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ против часовой стрелки.

Перейдем к полярной системе координат $\rho = e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$, $\varphi = \gamma - \beta t$:

---

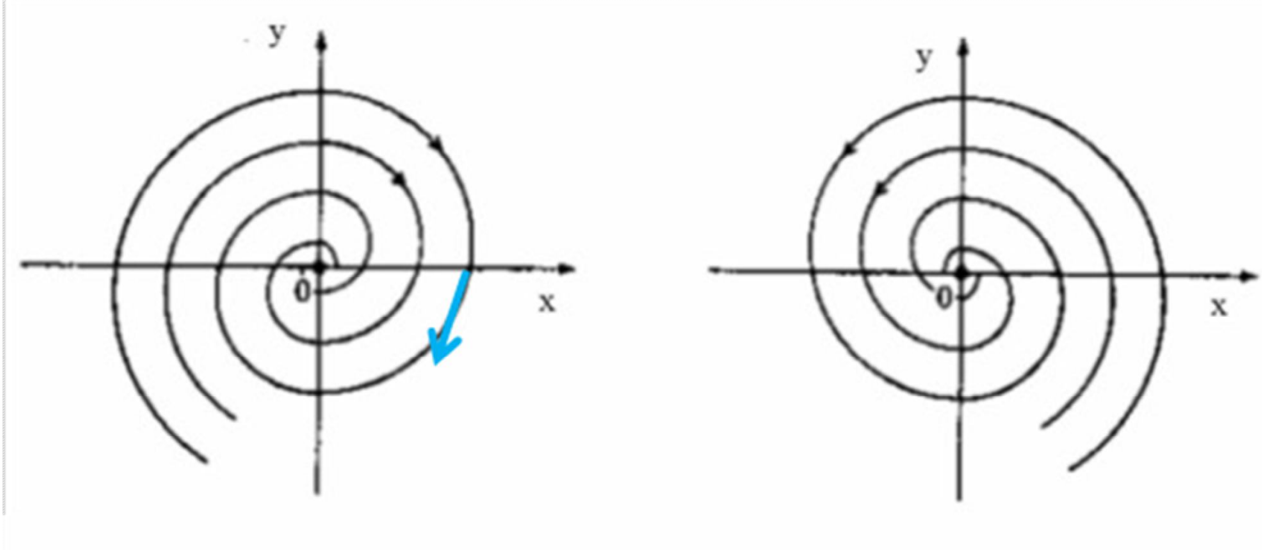
[3] $i = \sqrt{-1}$

$\xi_1 = \rho\cos\varphi,$
$\xi_2 = \rho\sin\varphi.$

<u>II.1</u> $\alpha < 0$ - положение равновесия **ФОКУС**: устойчиво по Ляпунову.

При увеличении t на период $\dfrac{2\pi}{|\beta|}$ получаем новые значения ξ_1 и ξ_2 с меньшим по модулю значением, так как $\rho = e^{\alpha t}\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$ убывает.

Траектории - закручивающиеся спирали с направлением движения к положению равновесия.



Движущаяся по траектории точка совершает затухающие (экспоненциально быстро) колебания.

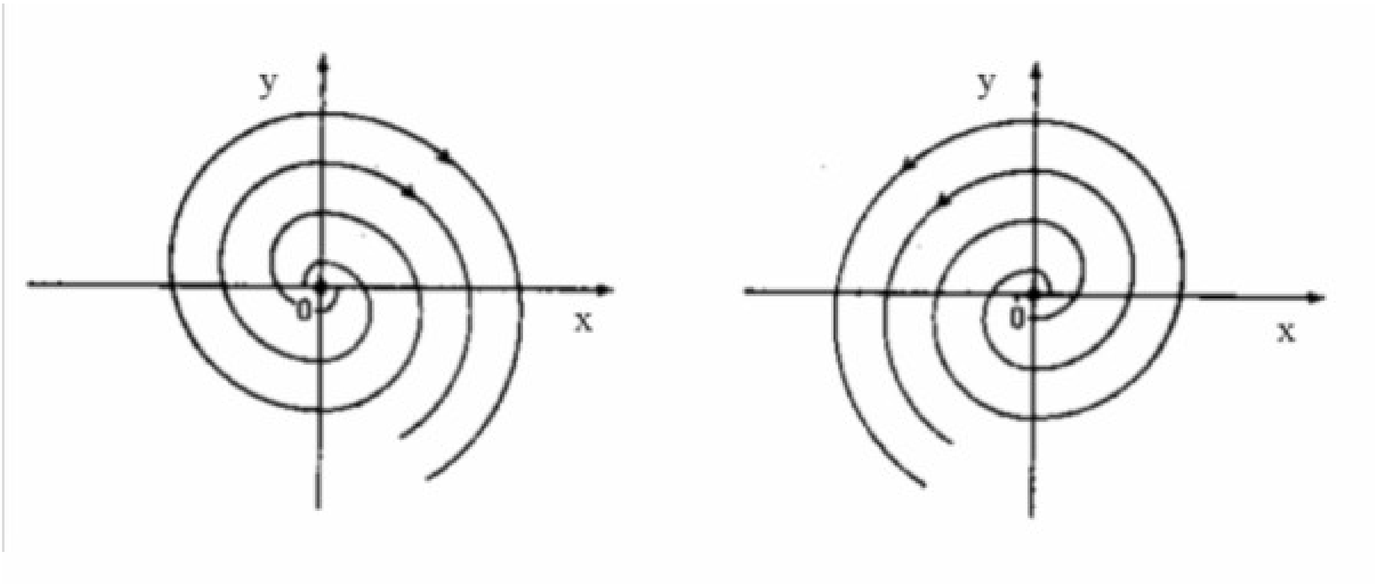
Гидродинамическая интерпретация: сток в виде засасывающей воронки.

Замечание 4.4. Направление закручивания можно определить с помощью вектора фазовой скорости в какой-нибудь точке вблизи положения равновесия (см. рис.).

Для облегчения счета часто берут точку на одной из координатных осей: $\begin{pmatrix}\varepsilon\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Тогда $\vec{V} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}\Bigg|_{(\varepsilon,\,0)} = A\begin{pmatrix}\varepsilon\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}\varepsilon$.

<u>II.2</u> $\alpha > 0$ - положение равновесия **ФОКУС**: неустойчиво по Ляпунову.

Фазовая картина аналогична предыдущему случаю, но теперь спирали раскручиваются: направление движения от положения равновесия.



Движущаяся по траектории точка совершает колебания все большего размаха, экспоненциально быстро удаляющие ее от положения равновесия.

Гидродинамическая интерпретация: спиралевидный источник (дождевая установка).

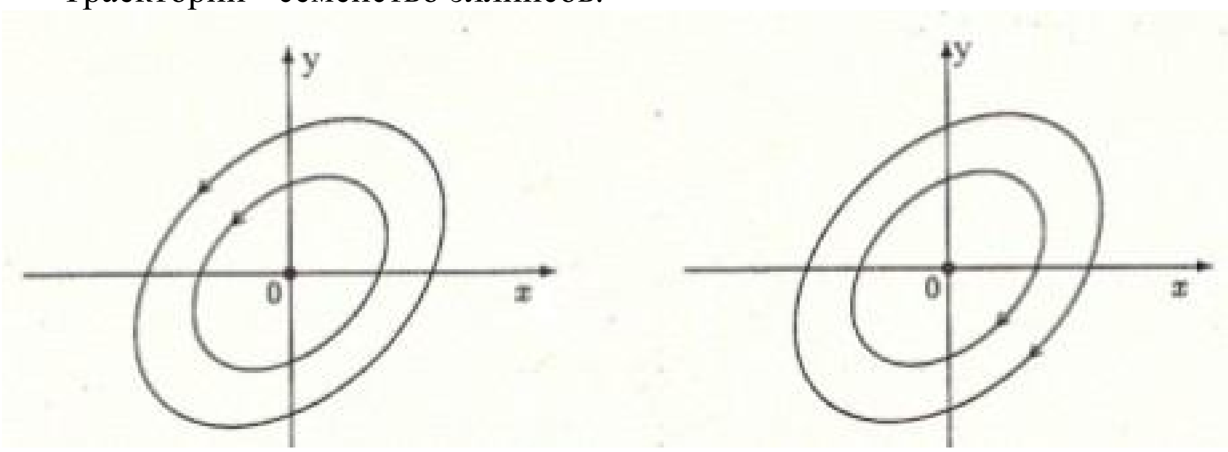
II.3 $\alpha = 0$ - положение равновесия **ЦЕНТР**: устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.

$$\xi_1 = \rho\cos\varphi = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\cos(\gamma - \beta t),$$

$$\xi_2 = \rho\sin\varphi = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\sin(\gamma - \beta t).$$

$$\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} = C_1^{\,2} + C_2^{\,2}.$$

Траектории - семейство эллипсов.



Окрестность положения равновесия ЦЕНТР заполнена замкнутыми траекториями, по каждой из которых совершается периодическое движение.

Гидродинамическая интерпретация: вихрь (изучается в метеорологии).

Замечание 4.5. Линейное представление не дает представления об устойчивости линейной модели.

Пример 4.1. Исследовать положения равновесия $\begin{cases} \dot{x} = & -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = & x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$.

□ $\begin{cases} \dot{x} = & 0, \\ \dot{y} = & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y - x(x^2 + y^2) = & 0, \\ x - y(x^2 + y^2) = & 0 \end{cases} \rightarrow -y\left(1 + \left(x^2 + y^2\right)^2\right) = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0.$

$(0,\ 0)$ - положение равновесия.

Линейная модель: $\dfrac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,\,2} = \pm i$ - ЦЕНТР.

Вопрос об устойчивости нелинейной модели решаем с помощью функции Ляпунова или Четаева.

$V(x,\ y) = x^2 + y^2 > 0 \quad \forall \vec{x} \in \overset{o}{U}_\rho(0,\ 0)$.

Производная в силу системы

$$\frac{d}{dt}V(x,\ y) = 2x\cdot\left(-y - x\left(x^2 + y^2\right)\right) + 2y\cdot\left(x - y\left(x^2 + y^2\right)\right) = -2\left(x^2 + y^2\right)^2 < 0.$$

Следовательно, $V(x,\ y) = x^2 + y^2$ - строгая функция Ляпунова, и положение равновесия $(0,\ 0)$ асимптотически устойчиво. ■

$\boxed{\text{III.}}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0 \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$.

III.1 Существует базис из собственных векторов.

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda t} + C_2\vec{h}_2 e^{\lambda t} = \xi_1(t)\vec{h}_1 + \xi_2(t)\vec{h}_2,$$

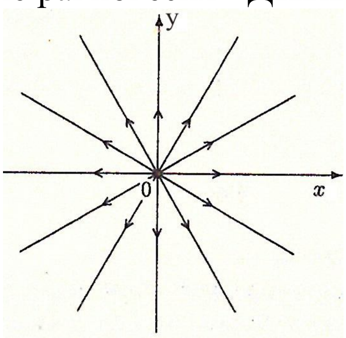
где $\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$, $\xi_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$.

$C_1 = 0$ - траектории полуоси $O\xi_2$,

$C_2 = 0$ - траектории полуоси $O\xi_1$,

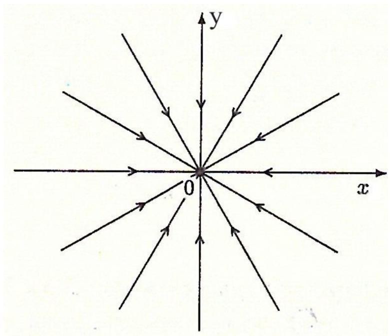
$C_1 \neq 0,\ \ C_2 \neq 0$: $\ \xi_1(t) = \dfrac{C_1}{C_2}\xi_2(t)$ - траектории прямые, проходящие через начало координат.

Положение равновесия - **ДИКРЕТИЧЕСКИЙ УЗЕЛ**.



$\lambda > 0$, неустойчиво

Гидродинамическая интерпретация: сток



$\lambda < 0$, устойчиво

Гидродинамическая интерпретация: источник

Положение равновесия ДИКРИТИЧЕСКИЙ УЗЕЛ (устойчивый/неустойчивый)

III.2 Не существует базиса из собственных векторов.

Строим жорданову цепочку:

$A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1$,

$A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1$

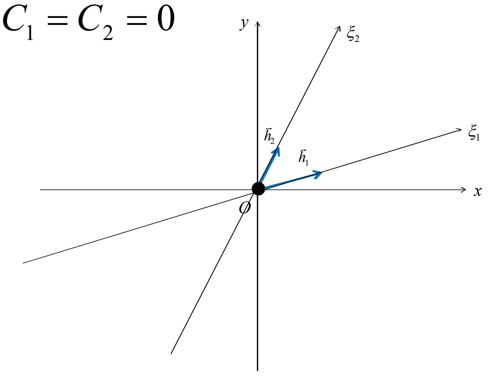
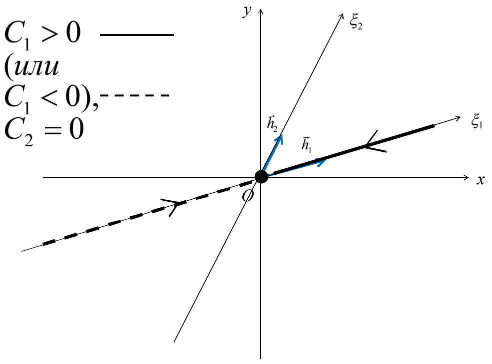
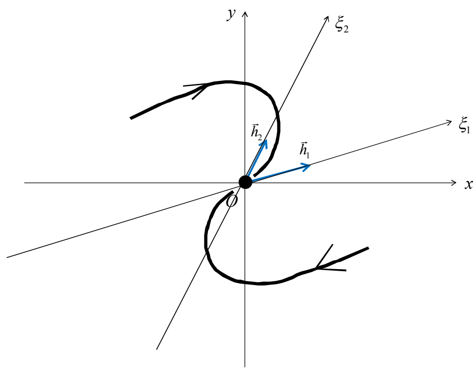
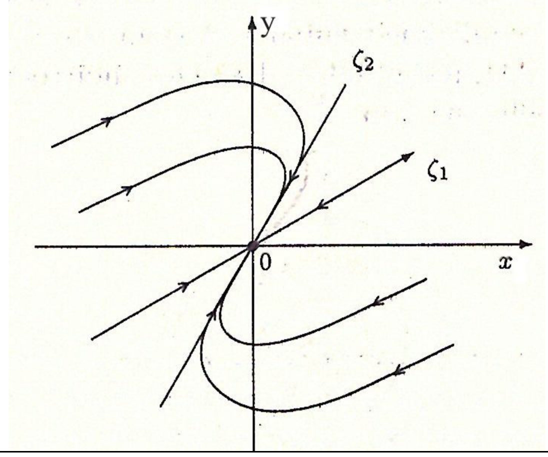
Решение $\vec{x}(t) = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda t} + C_2\left(\vec{h}_2 + t\vec{h}_1\right)e^{\lambda t} = \xi_1(t)\vec{h}_1 + \xi_2(t)\vec{h}_2$,

где

$\xi_1(t) = (C_1 + tC_2)e^{\lambda t}$, $\xi_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$.

Пусть, для определенности, $\lambda < 0$. Случай $\lambda > 0$ рассматривается аналогично.

Поскольку $\xi_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ и $\xi_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, то положение равновесия $O(0,\,0)$ асимптотически устойчиво.

❶	$C_1 = C_2 = 0$	- траектории вырождаются в точку $O(0,\,0)$ - положение равновесия	$C_1 = C_2 = 0$ 
❷	$C_1 > 0$ (*или* $C_1 < 0$), $C_2 = 0$	$\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$, $\xi_2(t) = 0$ - траекторией является положительная (отрицательная) полуось $O\xi_1$	
❸	$C_1 = 0$, $C_2 > 0$ (*или* $C_2 < 0$)	$\xi_1(t) = tC_2 e^{\lambda t}$, $\xi_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$ $\xi_1 = t\xi_2(t) = \dfrac{1}{\lambda}\xi_2 \ln\dfrac{\xi_2}{C_2}$, $\left(\dfrac{\xi_2}{C_2} = e^{\lambda t} > 0\right)$.	
❹	$C_1 \neq 0$ $C_2 \neq 0$	$\xi_1 = \left(\dfrac{C_1}{C_2} + \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{\xi_2}{C_2}\right)\xi_2$	

Пусть, для определенности $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$.

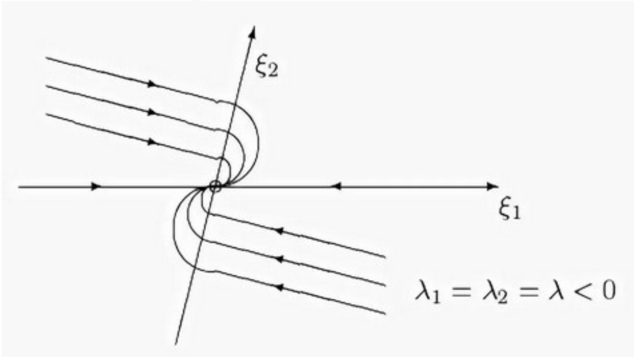
Тогда $\xi_1 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0+0$, $\xi_2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0+0$,

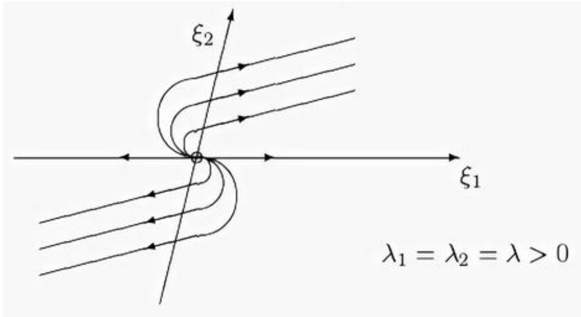
$\xi_1 \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$, а $\xi_2 \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_2}=\frac{d\xi_1}{dt}\frac{dt}{d\xi_2}=\frac{C_2+\lambda(C_1+tC_2)}{\lambda C_2},\ \frac{d\xi_1}{d\xi_2}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{1}{\lambda}+\frac{C_1}{C_2},\ \frac{d\xi_1}{d\xi_2}\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}\pm\infty .$$

Положение равновесия - ВЫРОЖДЕННЫЙ УЗЕЛ (устойчивый/неустойчивый)





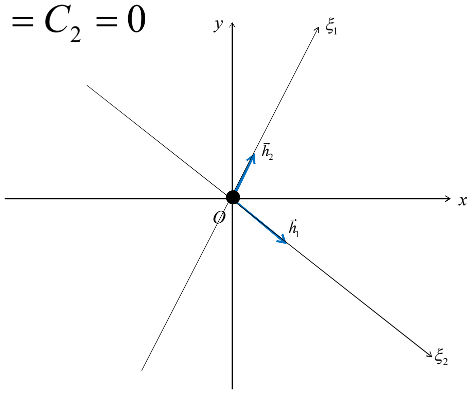
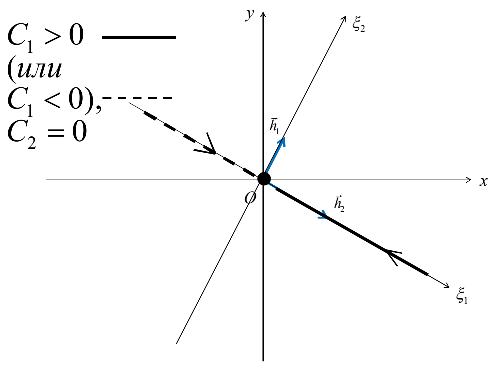
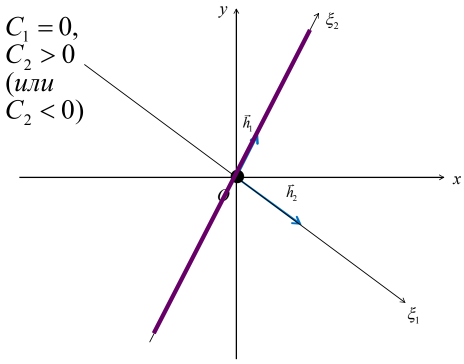
$\boxed{\text{IV.}}$ $\det A = 0$ - вырожденные случаи.

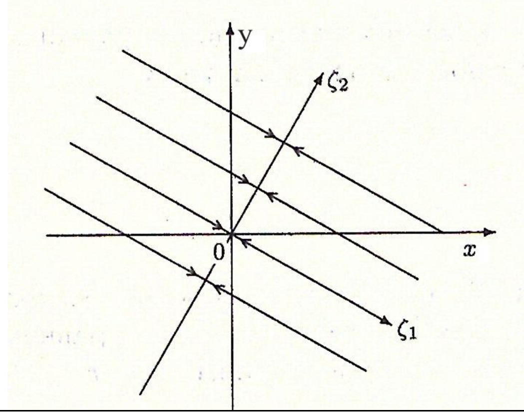
<u>IV.1</u> $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ (случай $\lambda_1 > 0$ рассматривается аналогично).

Существует базис из собственных векторов:

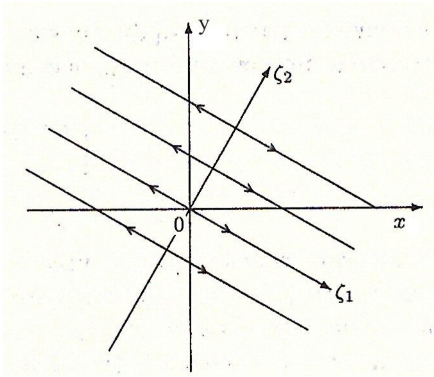
$\vec{x}(t) = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{h}_2 = \xi_1(t)\vec{h}_1 + \xi_2(t)\vec{h}_2$,

где $\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2(t) = C_2$.

❶	$C_1 = C_2 = 0$	- траектории вырождаются в точку $O(0,\ 0)$ - положение равновесия	$C_1 = C_2 = 0$ 
❷	$C_1 > 0$ (*или* $C_1 < 0$), $C_2 = 0$	$\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2(t) = 0$ - траекторией является положительная (отрицательная) полуось $O\xi_1$	
❸	$C_1 = 0$, $C_2 > 0$ (*или* $C_2 < 0$)	$\xi_1(t) = 0$, $\xi_2(t) = C_2$ - все точки $(\xi_1,\ 0)$ - положения равновесия.	

❹	$C_1 \neq 0$ $C_2 \neq 0$	$\xi_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2(t) = C_2$ - траектории прямые параллельные оси $O\xi_2$.	

IV.2 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ - рассматривается аналогично предыдущему.



IV.3 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

IV.3a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - все точки плоскости

IV.3b $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, существует собственный вектор матрицы A.

Строим жорданову цепочку:

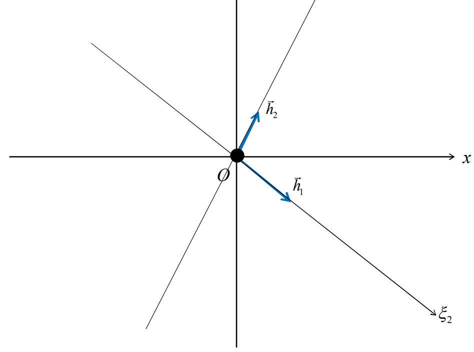
$A\vec{h}_1 = \lambda \vec{h}_1$,

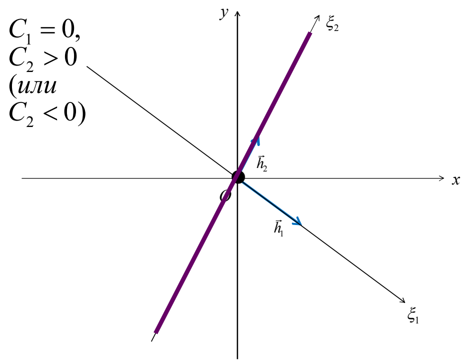
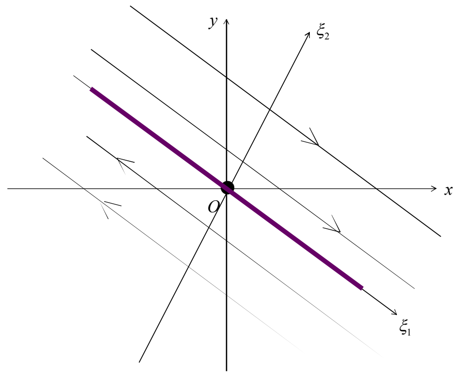
$A\vec{h}_2 = \lambda \vec{h}_2 + \vec{h}_1$

Решение $\vec{x}(t) = C_1\vec{h}_1 + C_2(\vec{h}_2 + t\vec{h}_1) = \xi_1(t)\vec{h}_1 + \xi_2(t)\vec{h}_2$,

где

$\xi_1(t) = (C_1 + tC_2)$, $\xi_2(t) = C_2$.

❶	$C_1 = C_2 = 0$	- траектории вырождаются в точку $O(0, 0)$ - положение равновесия	$C_1 = C_2 = 0$ 

❷	$C_1 > 0$ (*или* $C_1 < 0$), $C_2 = 0$	$\xi_1(t) = C_1$, $\xi_2(t) = 0$ - траекторией является положительная (отрицательная) полуось $O\xi_1$	
❸	$C_1 = 0$, $C_2 > 0$ (*или* $C_2 < 0$)	$\xi_1(t) = tC_2$, $\xi_2(t) = C_2$	
❹	$C_1 \neq 0$ $C_2 \neq 0$	$\xi_1(t) = (C_1 + tC_2)$, $\xi_2(t) = C_2$	

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

РЕШИТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ *det(A-λE)=0*