Лекция 23 (8).

Гл. VIII. Нормальные автономные системы ОДУ.

§5. Первые интегралы.

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\vec{f}(\vec{x},t). \qquad (5.1)$$

Определение. Функция $U(\vec{x})$, $U:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

- определенная и
- непрерывно дифференцируемая в области $D\subset\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$,
- не тождественно равная постоянной в этой области D,
- и такая, что для любого решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$, $t\in I$, СОДУ (5.1) $\exists C=const:U(\vec{x})=C \ \ \forall t\in I$

называется **первым интегралом** СОДУ (5.1).

Физический смысл: законы сохранения.

Перспективы: знание одного первого интеграла позволяет уменьшить число неизвестных функций в данной СОДУ.

Замечание 5.1. Пусть $U(\vec{x})$ - первый интеграл (5.1). $F(y)\in C^1(\mathbb{R})$. $F(U(\vec{x}))$ - тоже первый интеграл.
Т.о., если (5.1) имеет хотя бы один первый интеграл, то она имеет бесконечно много первых интегралов.

Важным является понятие функциональной независимости первых интегралов.

Определение. Функции $U_1(\vec{x}),\dots,U_m(\vec{x})$, $m\le n$ называются **функционально зависимыми** в области $D\subset\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, если в D одну из них можно выразить через остальные, т.е. $\exists j\le m$: $U_j(\vec{x})=W(U_1(\vec{x}),\dots,U_{j-1}(\vec{x}),\dots,U_{j+1}(\vec{x}),\dots,U_m(\vec{x}))$.

Определение. Если ни в какой подобласти $D'\subset D$ функции $U_1(\vec{x}),\dots,U_m(\vec{x})$, $m\le n$ не являются функционально зависимыми, то они называются **функционально независимыми** в области D.

💣 Не путать с линейной независимостью.

Пример 5.1. Функции $u_1=x_1$, $u_2=x_2$, $u_3=x_1^{\,2}-x_2^{\,2}$ - линейно независимы, но функционально зависимы, так как $\forall D\subset\mathbb{R}^2$ $u_3=u_1^{\,2}-u_2^{\,2}$.

Так как из любой неавтономной СОДУ (5.1) можно стандартным образом получить автономную систему. расширив ее фазовое пространство за счет временной переменной t:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}, t), \\ \dot{t} = 1, \end{cases}$$

то в дальнейшем будем рассматривать АСОДУ

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. (критерий первого интеграла)

> Для того, чтобы функция $U(\vec{x}) \in C^1(D)$ была первым интегралом АСОДУ (5.2) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{x}) = 0\,^{1}. \tag{5.3}$$

○ ⇨ Пусть $U(\vec{x})$ - первый интеграл (5.2) в области D,
а $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение (5.2).
Тогда, по определению первого интеграла, $v(t) = U(\vec{\varphi}(t)) = const$.
И $\dfrac{dv(t)}{dt} = 0$.

С другой стороны $\dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{dU(\vec{\varphi}(t))}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot \dfrac{dx_k}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{x})$.

Т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{x}) = 0$. ➔

⇦ Пусть справедливо (5.3).
Рассмотрим $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - решение (фазовую траекторию) (5.2).

$$\left.\frac{d}{dt}U(\vec{x}(t))\right|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \left.\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}\right|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \left.\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{x})\right|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \left|\begin{matrix} \textit{в силу} \\ (5.3) \end{matrix}\right| = 0.$$ 🡐●

(5.3) можно записать в виде

$$\left(\nabla U(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})\right) = 0. \tag{5.3a}$$

<u>Геометрический смысл</u>.

$U(\vec{x}) = C = const$ - гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$.
Вектор $\nabla U(\vec{x})$ ортогонален к S.

В силу (5.3а) $\vec{f}(\vec{x})$ ортогонален $\nabla U(\vec{x})$, следовательно, касательный к S.

Т.о., $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - фазовая траектория (5.2), проходящая через точку $\vec{x}_0 \in S$, лежит на S $\forall t > t_0$.

Т. о., $U(\vec{x}) = C$ задает в $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ $(n-1)$-мерную гиперповерхность S, целиком состоящую из фазовых траекторий.

---

[1] См. Л21-22: производная в силу системы- производная вдоль векторного поля - производная Ли.

Существование у АСОДУ (5.2) первого интеграла в целом явление довольно редкое.

Исключения: закон сохранения энергии,

закон сохранения количества движения.

Обнаружение первых интегралов в большинстве случаев обеспечивает прорыв в решении задач.

Но если рассматривать достаточно малые окрестности точек фазового пространства, то в них первые интегралы существуют "всегда".

Причина локального существования заключается в том, что в малой окрестности любой точки, не являющейся положением равновесия АСОДУ (5.2), траектории почти параллельны, их можно локальной заменой переменных (диффеоморфизмом) перевести в систему $\dot{y}_1 = 0$, $\dot{y}_2 = 0$, ... , $\dot{y}_{n-1} = 0$ $\dot{y}_n = 1$, траекториями которой являются прямые.

Причем это система имеет $n-1$ первый интеграл (функционально независимый).

А каждый первый интеграл позволяет понизить порядок системы на единицу:
$U(\vec{x}) = C \rightarrow x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$
и система принимает вид

$$\frac{d}{dt} x_j = f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1})),\ j = \overline{1, n-1}$$

Пример 5.2. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$

☐ Запишем систему в симметричной форме $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$.

Так как $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dz}{x-y}$, то $dx = -dz$. Интегрируя, получаем $x + z = const$, и, следовательно, $U_1(\vec{x}) = x + z = C$.

Действительно: $\dfrac{\partial U_1(\vec{x})}{\partial x}(y-x) + \dfrac{\partial U_1(\vec{x})}{\partial y}(x+y+z) + \dfrac{\partial U_1(\vec{x})}{\partial z}(x-y) =$

$$= 1 \cdot (y-x) + 0 \cdot (x+y+z) + 1 \cdot (x-y) = (y-x) + (x-y) = 0.$$

Т.о., $z = C - x$.

Подставим в систему: $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = x + y + C - x, \\ \dot{z} = -\dot{x} = x - y, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = y + C. \end{cases}$ ■

Теорема 5.2. (о выпрямлении траекторий)

Пусть точка $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in D$ не является положением равновесия ФСОДУ (5.2),

тогда в некоторой малой окрестности точки $\vec{b}$ с помощью гладкой замены переменных АСОДУ (5.2) можно привести к виду

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,\ \frac{dy_2}{dt} = 0,\ \dots,\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0,\ \frac{dy_n}{dt} = 1. \qquad (5.4)$$

○ По условию $\vec{b}$ - не положение равновесия, т.е. $\vec{f}(\vec{b}) \neq 0$.

Пусть $f_n(\vec{b}) \neq 0$ (всегда можно перенумеровать).

Рассмотрим $\Pi : \xi_n = b_n$, $\Pi \in \mathbb{R}^n$.

Точка $\xi \in \Pi$, т.е. $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$. Точка ξ близкая к $\vec{b}$:[2] $\xi \in U_\delta(\vec{b})$.

$\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \xi)$ решение (5.2) с НУ $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(0, \xi)$.

В координатной форме это решение можно записать как

$x_i = \varphi_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, b_n) = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t)$, $i = \overline{1, n}$,

так как b_n - фиксированная координата начальной точки: от нее ничего не зависит.

Последнее выражение можно рассматривать как систему относительно неизвестных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, t$.

Замена

$y_1 = \xi_1,\ y_2 = \xi_2,\ \dots,\ y_{n-1} = \xi_{n-1},\ y_n = t$.

При этом $y_i = \xi_i$, $i = \overline{1, n-1}$ не меняются вдоль траектории $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \xi)$, где ξ начальная точка.

Т.о. $\vec{y}$ - прямая, причем $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $\dot{y}_n = 1$.

Осталось убедиться, что ❶ замена гладкая и

❷ невырожденная (ее Якобиан $\neq 0$).

Так как ξ начальная точка, то имеем

$\xi_i = \varphi_i(0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, b_n) = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, 0)$, $i = \overline{1, n}$

$b_n = \varphi_n(0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, b_n) = \psi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, 0)$.

Откуда

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n-1}, \text{ т.е. } \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = \delta_{ij},\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n-1}.$$

При этом

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = *,\ i = \overline{1, n-1},$$

---

[2] Т.е. $\vec{f}(\xi) \neq 0$.

$$\left.\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial x_n}{\partial t}\right|_{t=0} = f_n(\vec{\varphi}(0, \xi)) = f_n(\xi) \neq 0,$$

поскольку $f_n(\vec{b}) \neq 0$ по условию, f_n непрерывна, а $\xi \in U_\delta(\vec{b})$.

Матрица Якоби

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & * \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & f_n(\vec{\xi}) \end{pmatrix}, \text{ следовательно } \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right) = f_n(\vec{\xi}) \neq 0.$$

А так как $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ не зависят от времени, то в новых переменных АСОДУ (5.2) принимает вид (5.4).

●

Возникает естественный вопрос: сколько существует функционально независимых первых интегралов у АСОДУ (5.2)?

Вопрос о зависимости функций исследуется с помощью теоремы о неявных функциях.

Утверждение 5.1. Градиенты зависимых функций линейно зависимы в каждой точке.

○ Пусть $U_1(\vec{x}), \ldots, U_m(\vec{x}) \in C^1(D)$, $m \leq n$, зависимы[3], т.е. $U_j(\vec{x}) = F(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{j-1}(\vec{x}), \ldots, U_{j+1}(\vec{x}), \ldots, U_m(\vec{x}))$, $F \in C^1(D)$.

$$\frac{\partial U_j(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial U_{j-1}}\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial U_{j+1}}\frac{\partial U_{j+1}}{\partial x_i} + \ldots \frac{\partial F}{\partial U_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{т.е.,}$$

так как $\nabla U_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_k}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, $k = \overline{1, m}$, то

$$\nabla U_j = \frac{\partial F}{\partial U_1}\nabla U_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial U_{j-1}}\nabla U_{j-1} + \frac{\partial F}{\partial U_{j+1}}\nabla U_{j+1} + \ldots \frac{\partial F}{\partial U_m}\nabla U_m. \text{●}$$

💣 $\dfrac{\partial W}{\partial U_k}$, $k = \overline{1, j-1}, \overline{j+1, m}$ в каждой точке $\vec{x} \in D$ <u>разные</u>!

Линейной независимостью градиентов в области считается нарушение линейной зависимости хотя бы в одной точке.

Утверждение 5.1 позволяет сформулировать

[3] функционально зависимы

Определение. Функции $U_1(\vec{x}), \ldots, U_m(\vec{x})$, $m \le n$ называются **функционально независимыми** в области $D \subset \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, если в каждой точке этой области D $\nabla U_1(\vec{x}), \ldots, \nabla U_m(\vec{x})$ - линейно-независимы.

Пример 5.1. $\nabla u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla u_3 = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

Лемма 5.1. Зависимость и независимость системы функций инвариантна относительно гладко обратимой (невырожденной) замены переменных.

○ <u>От противного</u>: пусть независимые функции могут перейти в зависимые.

$U_k(\vec{x})$, $k = \overline{1, m}$ - независимые.

$\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ гладкая обратимая (невырожденная) замена, т.е. $\vec{x} = \vec{h}(\vec{y})$.

$$\underset{\text{независимые}}{\underset{\uparrow}{U_k(\vec{x})}} = U_k(\vec{h}(\vec{y})) = \underset{\text{зависимые}}{\underset{\uparrow}{V_k(\vec{y})}}, \ k = \overline{1, m}.$$

Т.е. $\exists j \le m : V_j(\vec{y}) = W(V_1(\vec{y}), \ldots, V_{j-1}(\vec{y}), \ldots, V_{j+1}(\vec{y}), \ldots, V_m(\vec{y}))$.

Проведем обратную замену $V_k(\vec{y}) = V_k(\vec{g}(\vec{x})) = U_k(\vec{x})$, $k = \overline{1, m}$.

Получили $U_j(\vec{x}) = W(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{j-1}(\vec{x}), \ldots, U_{j+1}(\vec{x}), \ldots, U_m(\vec{x}))$, т.е. $U_k(\vec{x})$, $k = \overline{1, m}$ - функционально зависимы: противоречие.●

Лемма 5.2. Первые интегралы АСОДУ (5.2) инвариантны относительно гладкой невырожденной замены.

○ $U(\vec{x})$ - первый интеграл (5.2) $\underset{\textit{Теорема } 5.1}{\Leftrightarrow} (\nabla U(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})) = 0$.

Замена $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ (невырождена: $\vec{x} = \vec{h}(\vec{y})$).

Рассмотрим $\dot{\vec{y}}$:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} f_j(\vec{x}) = \left| \vec{x} = \vec{h}(\vec{y}) \right| = F_i(\vec{y}).$$

Обозначим матрицу Якоби $\dfrac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = G(\vec{x})$.

В этих обозначениях $\vec{F}(\vec{y}) = G(\vec{x})\vec{f}(\vec{x})$, соответственно $\vec{f}(\vec{x}) = G^{-1}(\vec{x})\vec{F}(\vec{y})$.

$$\nabla U(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial U}{\partial y_j} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial U}{\partial y_j} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_n} \end{pmatrix} = G^T(\vec{x}) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

$$\dot{U}(\vec{x}) = \left(\nabla U(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})\right) = \left(G^T(\vec{x}) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial y_n} \end{pmatrix}, G^{-1}(\vec{x})\vec{F}(\vec{y}) \right) = \left(\nabla_y U(\vec{x}(\vec{y})), G(\vec{x})G^{-1}(\vec{x})\vec{F}(\vec{y})\right) =$$

$$= \left(\nabla_y U\left(\vec{h}(\vec{y})\right), \vec{F}(\vec{y})\right) = \left(\nabla V(\vec{y}), \vec{F}(\vec{y})\right) = \dot{V}(\vec{y}).$$

Т.о., если $\dot{U}(\vec{x}) = 0$, то $\dot{V}(\vec{y}) = 0$. И наоборот.●

Лемма 5.3. Пусть точка $\vec{b} \in D$ не является положением равновесия АСОДУ (5.2).

Тогда в некоторой окрестности точки $\vec{b}$ любые n первых интегралов функционально зависимы.

○ $U_i(\vec{x}),\ i = \overline{1, n}$ первые интегралы (5.2), т.е. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial U_i(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{x}) = 0$,[4] $i = \overline{1, n}$.

И, соответственно, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial U_i(\vec{b})}{\partial x_k} \cdot f_k(\vec{b}) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Эту систему будем рассматривать как систему относительно неизвестных $f_k(\vec{b}),\ k = \overline{1, n}$, с основной матрицей $A = \left(\dfrac{\partial U_i(\vec{b})}{\partial x_k} \right)$.

Так как точка $\vec{b}$ не положение равновесия, то $\vec{f}(\vec{b}) \neq 0$. Следовательно $RgA < n$, и ее строки линейно зависимы. Т.е., $\nabla U_i(\vec{x}),\ i = \overline{1, n}$ - линейно зависимы. Следовательно, $U_i(\vec{x}),\ i = \overline{1, n}$ - функционально зависимы.●

Теорема 5.3. Пусть точка $\vec{b} \in D$ не является положением равновесия АСОДУ (5.2).

Тогда в некоторой окрестности точки $\vec{b}$ существует $n-1$ независимых первых интегралов АСОДУ (5.2).

○ Так как точка $\vec{b}$ не положение равновесия, то $\vec{f}(\vec{b}) \neq 0$.

Пусть $f_n(\vec{b}) \neq 0$ (всегда можно перенумеровать).

По **теореме 5.2** (о выпрямлении траекторий) найдется гладкая обратимая (невырожденная) замена переменных $y_i = g_i(\vec{x}),\ i = \overline{1, n}$ $\left(\vec{x} = \vec{h}(\vec{y})\right)$:

$$G(\vec{b}) = \left. \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \right|_{\vec{x}=\vec{b}} = \left. \frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} \right|_{\vec{x}=\vec{b}} \neq 0,$$

с помощью которой (5.2) приводится к виду (5.4).

У (5.4) существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $V_k(\vec{y}) = y_k = const$, $k = \overline{1, n-1}$.

Они функционально независимы, так как $\nabla V_k(\vec{y})$ суть столбцы единичной матрицы.

При этом каждый первый интеграл не зависит от $y_n = t$.

---

[4] Теорема 5.1 (критерий первого интеграла).

Действительно, если $Y(\vec{y}) = Y(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, t)$ - первый интеграл, то $0 = \dot{Y}(\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial y_n} \cdot 1 \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial y_n} = 0$, то есть не зависит от $y_n = t$ при фиксированных значениях y_j, $j = \overline{1, n-1}$.

По **леммам 5.1** и **5.2** независимые первые интегралы (5.4) переходят при обратной замене в независимые первые интегралы (5.2).●