Лекция 24 (9).

Гл. IX. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

До сих пор в курсе рассматривались ОДУ (СОДУ), т.е. ДУ (СДУ), в которых неизвестные функции (вектор-функции) зависели от одной пространственной переменной.

Довольно часто в приложениях возникают ДУ, в которых искомая функция зависит от двух и более независимых переменных:

$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ -

уравнение бегущей волны.

Определение. ДУ вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $x_1, \dots, x_n$ - независимые переменные,

а $u = u(x_1, \dots, x_n)$ - искомая функция,

называется ***дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка*** (ДУвЧП1).

ДУвЧП1 традиционно включаются в курс ОДУ, хотя по существу данная тема относится к курсу ДУвЧП или к курсу УМФ.

Оправданием служит то, что решение ДУвЧП1 сводится к решению СОДУ, почти не требуя специальных понятий и методов.

ДУвЧП более высокого порядка составляют костяк теоретической физики. Будут изучаться в курсе УМФ.

Мы будем рассматривать линейные однородные ДУвЧП1.

Определение. ДУ вида

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad (2)$$

где $\vec{x} \in J \subset \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, $f_i(\vec{x}) \in C^1(J)$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\vec{x}) \neq 0$,

$u = u(\vec{x})$, $u(\vec{x}) \in C^1(J)$, - искомая функция,

называется ***линейным однородным*** ДУвЧП1 (ЛДУвЧП1).

Определение. Функция $u = \varphi(\vec{x})$ называется решением линейного однородного ДУвЧП1 (2) в области $\Omega \subset J \subset \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, если

- $\varphi(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$,
- $\sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x})\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_i} \equiv 0 \;\; \forall \vec{x} \in \Omega$.

<u>Геометрическая интерпретация</u>: решение ДУвЧП1 (1) ((2)) можно интерпретировать как поверхность в пространстве переменных $\vec{x}, u$.

Вводя в рассмотрение вектор-функцию $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$, (2) можно записать в матричном виде

$$\left(\vec{f}(\vec{x})\right)^T \nabla u = \left(\vec{f}(\vec{x}), \nabla u\right) = 0. \tag{2a}$$

Что напоминает формулу (5.3) Лекции 23 (8) - Теорема 5.1 критерий первого интеграла АСОДУ $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x})$.

Определение. АСОДУ

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}) \tag{3}$$

называется ***характеристической системой*** для ЛДУвЧП1 (2), а ее фазовые траектории ***характеристиками*** ЛДУвЧП1 (2).

Замечание 1. Так как $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\vec{x}) \neq 0$, то в Ω у характеристической АСОДУ (3) нет положений равновесия.

Теорема 1. Функция $u = \varphi(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$ является решением ЛДУвЧП1 (2) $\Leftrightarrow$ $\varphi(\vec{x})$ является первым интегралом характеристической АСОДУ (3).

○ Достаточно вспомнить Теорему 5.1 - критерий первого интеграла АСОДУ (Лекция 23 (8)). ●

Замечание 2. В силу ограничений, наложенных на коэффициенты ЛДУвЧП1 (2), а именно:

- $f_i(\vec{x}) \in C^1(J),\ i = \overline{1, n}$,
- $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\vec{x}) \neq 0\ \ \forall \vec{x} \in \Omega$ -

справедлива **Теорема 3.1**. (существования и единственности) (Лекция 15) для характеристической АСОДУ (3).

И через каждую точку $\Omega \subset \mathbb{R}_{\vec{x}}^n$ проходит одна и только одна характеристика ЛДУвЧП1 (2).

Замечание 3. Пусть $z = z(x, y)$. ДУ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$[1]. Ему формально удовлетворяет $z = V(y)$, где $y = y(x)$: $\dfrac{dy}{dx} = 0$, т.е. $y = C$.

---

[1] Характеристическая система $\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$

Согласно определению решения ЛДУвЧП1 (2) $V(y) \in C^1(\mathbb{R}^2_{xy})$ - решение. Причем общее, так как содержит все решения.

В отличие от ОДУ 1-го порядка, решения которых зависят от произвольной постоянной, решение ДУвЧП1 зависит от "произвольной функции".

Теорема 2. Если $U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x})$ - независимые[2] первые интегралы характеристической АСОДУ (3) в окрестности произвольной точки $\vec{b} \in \Omega \subset J \subset \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, то все решения ЛДУвЧП1 (2) в этой окрестности имеют вид

$$u(\vec{x}) = F(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x})), \tag{4}$$

где F - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

○ ❶ По **Теореме 1**, вспоминая, что функция от первого интеграла есть первый интеграл, $F(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x}))$ - решение ЛДУвЧП1 $\Leftrightarrow$ $F(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x})) = const$ вдоль характеристик ЛДУвЧП1 (2) (фазовых траекторий характеристической АСОДУ (3)).

❷ А так как $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\vec{b}) \neq 0$ (согласно определению ЛДУвЧП1 (2)), то точка $\vec{b}$ - не положение равновесия,
т.е. в некоторой ее окрестности по **Теореме 5.3** (Лекция 23(8)) существует $(n-1)$ функционально независимый первый интеграл: $U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x})$.
При этом любой первый интеграл имеет вид $U(\vec{x}) = F(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x}))$.
Т.о. $u(\vec{x}) \underset{\text{Теорема 1}}{=} U(\vec{x}) = F(U_1(\vec{x}), \ldots, U_{n-1}(\vec{x}))$.●

Формула (4) дает общее решение ЛДУвЧП1 (2), зависящее от $(n-1)$-ой функции, принимающей постоянное значение на характеристиках ЛДУвЧП1 (2).

Следствие. Решения ЛДУвЧП1 (2) постоянны вдоль характеристик.

<u>Алгоритм</u> поиска общего решения ЛДУвЧП1 (2) заключается в нахождении $(n-1)$-го первого интеграла характеристической АСОДУ (3).

Два полезных момента:

I

Если мы нашли один первый интеграл характеристической АСОДУ (3), то из него можно выразить одну из искомых функци характеристической АСОДУ (3), например, x_n через остальные и произвольную постоянную:

$U_1(x_1, \ldots, x_n) = C \rightarrow x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, C)$.

Внося это выражение в 1-ое, 2-ое, ... , $(n-1)$-ое Ду характеристической АСОДУ (3), получим

$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, C)),\ i = \overline{1, n-1}$.

Т.о. мы получили систему уже из $(n-1)$-го ДУ для $(n-1)$-го неизвестного.

[2] функционально независимые

И т.д.

В результате получим решение , зависящее от n произвольных постоянных.

Если известны k $\left(k < n-1\right)$ независимых[3] первых интегралов характеристической АСОДУ (3), то порядок системы (3) понизится на k единиц.

II

Запись характеристической системы в ***симметричной*** форме, т.е. такой форме, где ни одно из переменных не взято за независимое (поэтому в уравнение входят не производные, а дифференциалы)

$$\frac{dx_1}{f_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{f_2(\vec{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(\vec{x})}. \tag{5}$$

Если в (5) общуючасть всех дробей обозначить за dt, то получим АСОДУ (3).

В области, где $f_i(\vec{x}) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, системы (3) и (5) эквивалентны.

Симметричная форма записи системы часто облегчает поиск первых интегралов, используя известное правило дробей:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k} \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} b_i}.$$

Утверждение 1. (правило дробей)

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k}$, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} b_i}$.

○ Действительно, пусть $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k} = l$.

Тогда $a_i = lb_i$ $i = \overline{1, k}$.

Откуда получаем, что $\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} b_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} lb_i}{\sum_{i=1}^{k} b_i} = l = \frac{a_1}{b_1}$, ч.т.д. ●

Пример 1. $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$.

□ Система в форме Коши $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$

По правилу дробей $\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = -\frac{d(x-y)}{x-y}$: $\ln|x+y+z| = -2\ln|x-y| + C$.

[3] функционально независимые

Первый интеграл $U_1(\vec{x}) = (x+y+z)(x-y)^2$.

$$z = \frac{C}{(x-y)^2} - (x+y).$$

Система 2-го порядка $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{C}{(x-y)^2} - x, \\ \dot{y} = \dfrac{C}{(x-y)^2} - y. \end{cases}$ ■

Пример 2. $2xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - y^2 - 2xz\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

□ Характеристическая система $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz, \\ \dot{z} = -\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

В симметричной форме $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dy}{1 - y^2 - 2xz} = \dfrac{dz}{-y/x}$.

Из $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dz}{-y/x}$ получим $\dfrac{dx}{2x^2} = -dz$: $-\dfrac{1}{x} = -2z + c_1$. Первый интеграл $\underline{U_1(\vec{x}) = \dfrac{1}{x} - 2z}$.

$$z = \frac{1}{2x} - \frac{C_1}{2}.$$

Система 2-го порядка $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2x\left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{C_1}{2}\right) = xC_1 - y^2. \end{cases}$

В симметричной форме $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dy}{xC_1 - y^2}$ Или $\dfrac{dx}{2xy} \cdot \dfrac{y^2}{y^2} = \dfrac{dy}{xC_1 - y^2} \cdot \dfrac{2xy}{2xy} \xrightarrow{\text{по правилу дробей}}$

$\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{y^2dx + 2xydy}{2xy^3 + 2x^2yC_1 - 2xy^3}$, т.е. $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{y^2dx + xdy^2}{2x^2yC_1}$, или $xC_1dx = d\left(xy^2\right)$.

Получаем $\dfrac{x^2}{2}C_1 = xy^2 + C_2$. Или $C_2 = xy^2 - \dfrac{x^2}{2}C_1 = xy^2 - \dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{1}{x} - 2z\right) = xy^2 - \dfrac{x}{2} + x^2z$.

И второй первый интеграл $\underline{U_2 = xy^2 + x^2z - \dfrac{x}{2}}$.

Общий вид решения $\boxed{u(\vec{x}) = F\left(\dfrac{1}{x} - 2z,\ xy^2 + x^2z - \dfrac{x}{2}\right)}$. ■

Для выделения конкретного решения ЛДУвЧП1 (2) из общего решения (4) необходимо задать дополнительные условия: начальные
краевые,
смешанные,
и т.д.

Чаще всего такими условиями являются начальные.

Рассмотрим уравнение

$g(\vec{x})=0$,

которое в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ задает $(n-1)$-мерную поверхность S: $S=\{\vec{x}\in\Omega: g(\vec{x})=0\}$.

Пусть $g(\vec{x})\in C^1(\Omega)$ и $\nabla g(\vec{x})\neq 0$, т.е. S - гладкая.

Пусть на S задана функция $v(\vec{x})\in C^1(\Omega)$.

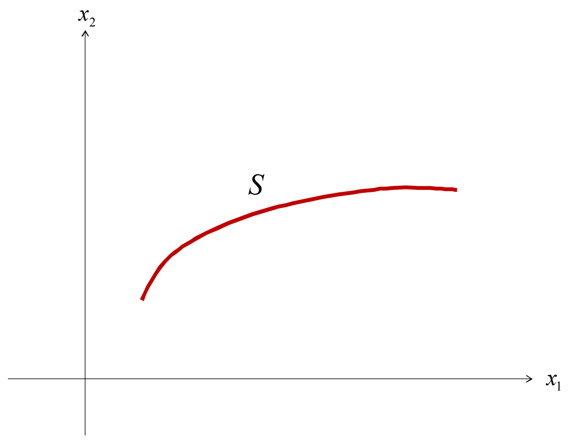
Зададим ***начальное условие*** (НУ)

$$u(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in S}=v(\vec{x}). \tag{6}$$

Задача Коши: найти такое решение ЛДУвЧП1 (2). которое удовлетворяет НУ (6):

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\vec{x})\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^{\,2}(\vec{x})\neq 0,\ f_i(\vec{x})\in C^1(\Omega),\\ u(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in S}=v(\vec{x}).\end{cases}$$

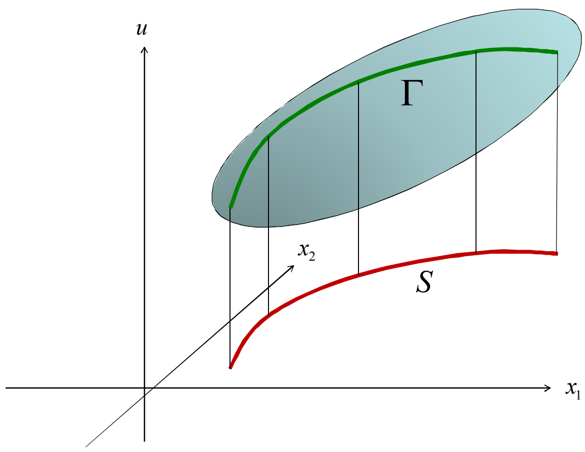
Иллюстрация при $n=2$.



$S=\{(x_1,x_2)\in\Omega: g(x_1,x_2)=0\}$,

$g(x_1,x_2)=0$ - кривая в плоскости Ox_1x_2.

НУ (6) определяет пространственную кривую Γ: $u(x_1,x_2)\big|_{g(x_1,x_2)=0}=v(x_1,x_2)$.



Нам надо найти интегральную поверхность ЛДУвЧП1 (2), содержащую кривую Γ (проходящую через кривую Γ).

<u>Принципиальное отличие</u> от ЗК для ОДУ:

- Существенно локальный характер.
- Решение ЗК (2), (6) существует и единственно НЕ для любой начальной поверхности S.

Определение. Точка $\vec{a}\in S$, для которой

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{a}) \dfrac{\partial g(\vec{a})}{\partial x_i} = 0 \qquad (7) \\ \text{называется } \textbf{\textit{характеристической точкой}} \text{ ЛДУвЧП1 (2).} \end{array} \right.$$

Пояснение: пусть $\vec{a}$ - характеристическая точка,

т.е. в ней $\vec{f}$ касается S.

Но $\vec{f}$ касается характеристик ЛДУвЧП1 (2),

т.е. S касается характеристик ЛДУвЧП1 (2).

Теорема 3. (существования и единственности)

Пусть точка $\vec{b} \in S$ не является характеристической точкой ЛДУвЧП1 (2).
Тогда в некоторой окрестности точки $\vec{b}$: $U_\delta(\vec{b}) \subset \Omega$ - решение задачи Коши (2), (6),
где $v(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$,
$S = \{\vec{x} \in \Omega : g(\vec{x}) = 0,\ g \in C^1(\Omega),\ \nabla g \neq 0\}$,
существует и единственно.

○ Так как $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\vec{b}) \neq 0$ (согласно определению ЛДУвЧП1 (2)), то точка $\vec{b}$ - не положение равновесия.

Т.е. в некоторой ее окрестности по **Теореме 5.3** (Лекция 23(8)) существует $(n-1)$ функционально независимый первый интеграл: $U_1(\vec{x}), \dots, U_{n-1}(\vec{x})$.

И, согласно **Теореме 2**, общее решение имеет вид (4):

$u(\vec{x}) = F(U_1(\vec{x}), \dots, U_{n-1}(\vec{x}))$,

где $F \in C^1(\Omega)$ и произвольна.

❶ Покажем, что F однозначно определяется из НУ (6).

С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_i(\vec{x}) = C_i,\ i = \overline{1, n-1}, \\ g(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно однозначно разрешить относительно $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, если ее Якобиан

$$\det \frac{\partial(U_1, \dots, U_{n-1}, g)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявных функциях $\vec{x} = H(U_1(\vec{x}), \dots, U_{n-1}(\vec{x}))$ - единственное непрерывно дифференцируемое решение.

И $\forall \vec{x} \in S \cap U_\delta(\vec{b})$ справедливо

$u(\vec{x}) = v(\vec{x}) = v(H(U_1(\vec{x}), \dots, U_{n-1}(\vec{x}))) = F(U_1(\vec{x}), \dots, U_{n-1}(\vec{x}))$ - искомое решение ЗК (2), (6), поскольку это

- первый интеграл и
- удовлетворяет НУ (6).

❷ Осталось показать, что матрица Якоби не вырождена.

Покажем это от противного:

$$\det\frac{\partial(U_1,\dots,U_{n-1},g)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=0.$$

$\nabla U_i(\vec{b}),\ i=\overline{1,n-1}$, - линейно независимы (см. утверждение 5.1 Лекция 23 (8)) в силу функциональной независимости $U_i(\vec{b})$.

Поэтому равенство нулю Якобиана возможно лишь в том случае, если последняя строка матрицы Якоби есть линейная комбинация ее остальных строк, т.е. $\nabla g(\vec{b})=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\nabla U_i(\vec{b})$, причем $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{\,2}\neq 0$.

Но согласно **Теореме 1** (критерий первого интеграла) (лекция 23 (8)) $(\nabla U_i(\vec{b}),\vec{f}(\vec{b}))=0$. Тогда $(\nabla g(\vec{b}),\vec{f}(\vec{b}))=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\nabla U_i(\vec{b}),\vec{f}(\vec{b})\right)=0$, что невозможно, так как по условию точка $\vec{b}$ не является характеристической.

Т.о. все условия теоремы о неявных функциях выполнены.

●

Пример 3. Решить задачу Коши $\begin{cases}2xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+(1-y^2-2xy)\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\\ u=\dfrac{1}{2}-y^2\ \textit{при}\ y^2+xz=1.\end{cases}$.

□В примере 2 уже нашли общий вид решения $u(\vec{x})=F\left(\dfrac{1}{x}-2z,\ xy^2+x^2z-\dfrac{x}{2}\right)$.

$u(x,y,z)\big|_{y^2+xy=1}=F(C_1,C_2)\big|_{y^2+xy=1}=\dfrac{1}{2}-y^2$, т.о. надо найти $y=y(C_1,C_2)$.

Рассмотрим систему $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2z=C_1,\\ xy^2+x^2z-\dfrac{x}{2}=C_2,\\ y^2+xz=1.\end{cases}$

(3) $xz-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-y^2$.

(2) $y^2+xz-\dfrac{1}{2}=\dfrac{C_2}{x}$ → $\underline{xz-\dfrac{C_2}{x}=\dfrac{1}{2}-y^2}$. → $xz-\dfrac{1}{2}=xz-\dfrac{C_2}{x}$ или $\dfrac{1}{2}=\dfrac{C_2}{x}$, т.е $x=2C_2$.

(1) $xz=\dfrac{1-C_1x}{2}=\dfrac{1}{2}-C_1C_2$

$\underline{\dfrac{1}{2}-y^2=xz-\dfrac{C_2}{x}}=\left(\dfrac{1}{2}-C_1C_2\right)-\dfrac{C_2}{2C}=-C_1C_2$ → $F(C_1,C_2)=-C_1C_2$ и

$u(\vec{x})=-\left(\dfrac{1}{x}-2z\right)\left(xy^2+x^2z-\dfrac{x}{2}\right)$ или $\boxed{u(\vec{x})=(2zx-1)\left(y^2+xz-\dfrac{1}{2}\right)}$. .■

Пример 3. Решить задачу Коши $\begin{cases} 2xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(1-y^2-2xy\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \\ u=\dfrac{1}{2}-y^2 \ \ при \ \ y^2+xz=1. \end{cases}$.

□В примере 2 уже нашли общий вид решения $u(\vec{x})=F\left(\dfrac{1}{x}-2z,\ xy^2+x^2z-\dfrac{x}{2}\right)$.

$u(x,\ y,\ z)\Big|_{y^2+xy=1}=F(C_1,\ C_2)\Big|_{y^2+xy=1}=\dfrac{1}{2}-y^2$, т.о. надо найти $y=y(C_1,\ C_2)$.

Рассмотрим систему $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-2z=C_1, \\ xy^2+x^2z-\dfrac{x}{2}=C_2, \\ y^2+xz=1. \end{cases}$

(3) $xz-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-y^2$.

(2) $y^2+xz-\dfrac{1}{2}=\dfrac{C_2}{x}$ → $\underline{xz-\dfrac{C_2}{x}=\dfrac{1}{2}-y^2}$. ➔ $xz-\dfrac{1}{2}=xz-\dfrac{C_2}{x}$ или $\dfrac{1}{2}=\dfrac{C_2}{x}$, т.е $x=2C_2$.

(1) $xz=\dfrac{1-C_1x}{2}=\dfrac{1}{2}-C_1C_2$

$\underline{\dfrac{1}{2}-y^2=xz-\dfrac{C_2}{x}}$ = $\left(\dfrac{1}{2}-C_1C_2\right)-\dfrac{C_2}{2C}$ = $-C_1C_2$ → $F(C_1,\ C_2)=-C_1C_2$ и

$u(\vec{x})=-\left(\dfrac{1}{x}-2z\right)\left(xy^2+x^2z-\dfrac{x}{2}\right)$ или $\boxed{u(\vec{x})=(2zx-1)\left(y^2+xz-\dfrac{1}{2}\right)}$. .■